ZO DENKEN MACHINES

een introductie tot de logica, de algebra van Boole en de techniek van de rekenmachines

IRVING ADLER

kader REEKS

Gescand en gerestaureerd door Jos Verstraten - 2025

ZO DENKEN MACHINES

N.V. UITGEVERSMAATSCHAPPIJ CENTREX — EINDHOVEN

ZO DENKEN MACHINES

EEN INTRODUCTIE TOT DE LOGICA, DE ALGEBRA VAN BOOLE EN DE REKENMACHINES

IRVING ADLER

kader REEKS

Oorspronkelijke titel: *Thinking Machines*
(The John Day Company, New York)
Nederlandse vertaling van Ing. D. C. van Reyendam
Tekeningen van Ruth Adler
Dit boek bevat 130 pagina's en 46 figuren.

U.D.C. nr. 681.14—523.8

Oorspronkelijke Engelse uitgave:
© Irving Adler, 1961
Nederlandse uitgave:
© N.V. Uitgeversmaatschappij Centrex, Eindhoven, 1964
Nadruk, ook gedeeltelijk, verboden

Geen garantie wordt gegeven dat de in dit boek vervatte informatie vrij loopt van octrooirechten; door deze publicatie wordt geen enkele licentie onder eventueel bestaande octrooien verleend.

Gedrukt in Nederland

INHOUD

Hoofdstuk I METALEN HERSENEN 1
Elektronisch personeel 1
Geleiders van projectielen 1
De robot, die zijn meester overtreft 2
Fabrieken zonder mensen 3
Componisten en vertalers 3
Het denken van een rekenmachine 3

Hoofdstuk II WERKTUIGEN, DIE ZICHZELF BEDIENEN . 5
Verlengstukken van het lichaam 5
De ontwikkeling van de werktuigen 5
Autorijden 7
De sleutel tot zelfbediening 8
Automatische rekenmachines 9

Hoofdstuk III EEN IDIOOT TOT DENKEN BRENGEN . . 10
We maken het ingewikkelde eenvoudig 10
De machine van Turing 11
De onderdelen van een automatische rekenmachine . . 16

Hoofdstuk IV CIJFERS EN GETALLEN 18
Een alfabet voor getallen 18
Arabische cijfers 20
Wanneer we acht vingers zouden hebben 20
Het binaire stelsel (tweetallig stelsel) 21
Wiskunde voor luie mensen 22
Binaire getallen 22
Verplaatsen van een bit 24

Hoofdstuk V ALGEBRA VAN DE GETALLEN 26
Grondbewerkingen 26
Algemene stellingen 27
De regels van de rekenkunde 27
Uitzonderingsgetallen 28
De algebra van natuurlijke getallen 29
Algebra van de gehele getallen 29
Andere soorten algebra 30

Hoofdstuk VI REKENMACHINES 31
Eenvoudige optelmachine 31
De abacus 32
Twee typen rekenmachines 34
De differentieel-analysator 35
Een telmachine 37
Een tafeltelmachine 39
Verstelling zonder zichtbare beweging 40

Hoofdstuk VII WOORDEN, ZINNEN EN LOGICA . . . 43
Gewoon en fantastisch denken 43
Gedachten en spraak 43
Zelfstandige naamwoorden en groepen 44
Zinnen en proposities 45
Op een propositie gebaseerde vormen 45
Relaties 47
Relaties tussen groepen en proposities 48

Hoofdstuk VIII ALGEBRA VAN DE GROEPEN . . . 50
Groepen in een universum 50
Een klein universum 51
De subgroep-relatie 52
Diagrammen van Venn 52
Nieuwe groepen van oude 53
Regels voor het optellen 54
Vermenigvuldiging van groepen 55
Regels voor de vermenigvuldiging 56
De distributieve eigenschappen 57
Het complement 59
Subgroep opnieuw bepaald 62
Sommige regels sluiten andere in 62
Axioma's voor de algebra van de groepen 63
Abstracte algebra van Boole 65
Voorbeelden van algebra's van Boole 66
Enkele theorema's bewezen 67
Equivalente uitdrukkingen 69
De wet van de dualiteit 70
Een tellingprobleem 71
Een puzzel van Lewis Carroll 73

Wie is de machinist? 75

Hoofdstuk IX ALGEBRA VAN DE PROPOSITIES . . . 77

Proposities over proposities 77
Symbolen voor waarheidswaarden 78
Symbolen voor verbindingen 78
Waarheidstabellen 79
Gelijkwaardige op een propositie gebaseerde vormen . . 81
Het verminderen van het aantal verbindingen 82
Algebra van de proposities 83
Tautologieën 86
Geldige en ongeldige redenering 86
Een vorm voor een waarheidstabel 88
De algebra van Boole in de geneeskunde 91

Hoofdstuk X SCHAKELCIRCUITS 96

Een algebra van schakelaars 96
Ontwerpen van een schakeling 98
Het vereenvoudigen van een schakeling 100
Schakelingen en logica 101

Hoofdstuk XI ELEKTRONISCHE REKENMACHINES . . 103

Poorten 103
Elektronische poorten 104
Getallen, die door stromen worden geschreven 106
Het ontwerpen van een elektronische optelmachine . . . 106
De halve opteller 107
De hele opteller 109
De rekenmachine met een hartslag 111
De dynamische impulseenheid (DPU) 112
Getallen in de NORC 113
Het NORC geheugen 114
Een getal uit de voorraad halen 115
Verplaatsen van een getal 115
Hoe de NORC getallen optelt 116
Hoe de NORC vermenigvuldigt 118
Getallen voor doorverbindingen 123
Getallen voor opdrachten 124
Ingang en uitgang 125
Snelheid 126

Hoofdstuk XII DENKENDE MACHINES EN HET VERSTAND 127
Machines, die zich als hersenen gedragen 127
Het brein is als een machine 128
Hersenen contra machine 128
De geheugeneenheid van het brein 129
Veelbelovend beter begrip 130
Index 131

HOOFDSTUK 1

METALEN HERSENEN

We zijn aangeland in de eeuw van de „denkende machines" en de automatisering. Bijeengevoegde collecties ijzerwaren, meestal samengesteld uit metaal en glas, doen werkzaamheden, die tot nu toe een monopolie waren van de levende menselijke hersenen. Zij voeren lange en ingewikkelde berekeningen uit, overwegen elke mogelijke gang van zaken in moeilijke situaties en verrichten leidende en controlerende functies. En wat meer is, zij doen dit alles sneller en nauwkeuriger dan onze hersenen het zonder speciale hulpmiddelen kunnen doen.

Elektronisch personeel

In de eenvoudigste baantjes, die zij vervullen, doen de elektronische „hersenen" dienst als schrijvers en boekhouders. In heel wat kantoren, bedrijven en winkels houden zij de voorraadlijsten bij. In de kantoren van de spoorwegen en luchtvaartmaatschappijen houden zij reserveringen en de verkoop van plaatsbewijzen in de gaten. Bij dit soort activiteiten werken de rekenmachines op het laagste niveau van hun bekwaamheid. Zij tellen getallen bij elkaar op of trekken ze van elkaar af en bewaren de resultaten daarvan in hun „geheugen"-toestel.
Zij krijgen een betere kans om hun kunnen te bewijzen, wanneer ze aan het werk worden gezet om betalingsstaten uit te rekenen. Gebruik makend van in de machine opgeslagen gegevens betreffende betalingstarieven, aantal uren dat wordt gewerkt, sociale lasten en in te houden belastingen, berekenen zij de loonlijsten van de verschillende werknemers. Bij dit werk maken zij gebruik van alle grondbewerkingen van de rekenkunde: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.

Geleiders van projectielen

Het afschieten van een projectiel op een bewegend doel is geen eenvoudige zaak. De baan van het projectiel hangt van meer af dan van de snelheid

en de richting waarin het wordt afgeschoten. Van het ogenblik af, dat het projectiel de aarde verlaat, wordt het aangetrokken door de zwaartekracht, ondervindt het de kracht van de wind, wordt het afgeremd door de luchtweerstand en wordt het gedraaid door de wenteling van de aarde. Al deze factoren moeten in rekening worden gebracht, wanneer de baan van het projectiel wordt berekend.
Uit de vele mogelijke banen voor het projectiel moet diegene worden uitgekozen, welke het mogelijk maakt het bewegende doel te onderscheppen. De berekeningen die nodig zijn om deze keus te doen, moeten worden uitgevoerd vóór het projectiel wordt afgeschoten. Betreft het geleide projectielen, dan moeten er nog berekeningen worden gemaakt nadat het projectiel is afgeschoten. De baan die het projectiel volgt, wordt vergeleken met de baan, die het zou moeten volgen. Zodra er afwijkingen van deze baan worden geconstateerd, wordt de koers veranderd om de fout weer te herstellen. Alleen elektronische rekenmachines werken snel genoeg om deze correcties uit te rekenen terwijl het projectiel in de lucht is. De rekenmachines, die de plaats van een projectiel bepalen en de baan corrigeren, maken veel ingewikkelder wiskundige berekeningen dan die, welke inventariseren of loonlijsten uitrekenen. Zij lossen zelfs zogenaamde *differentiaalvergelijkingen* op.

De robot, die zijn meester overtreft

Om eens te laten zien wat een rekenmachine doen kan en ook om nieuwe mogelijkheden ervoor te onderzoeken, hebben de firma's die ze vervaardigen, enkele rekenmachines ontworpen die spelletjes kunnen spelen. Een daarvan was zodanig gebouwd, dat zij in staat was een partij schaak te spelen tegen een menselijke tegenstander. De machine ziet verschillende zetten vooruit. Zij onderzoekt alle zetten, die zij kan doen en alle tegenzetten van haar tegenstander. Na alle mogelijkheden te hebben overwogen, kiest zij de zet, die haar de beste lijkt. De machine herinnert zich iedere zet van iedere gespeelde partij, zodat zij in later te spelen partijen de zetten kan weglaten, die niet zo'n best resultaat hadden. Met andere woorden, deze machine „leert" van haar eigen fouten. Dank zij deze ingebouwde mogelijkheid om te leren heeft de machine haar spelpeil zo hoog opgevoerd, dat zij nu veel beter schaakt dan de ingenieur, die haar heeft ontworpen.

Fabrieken zonder mensen

In een normale fabriek staan machines, die een groot deel van het werk doen, maar er zijn mannen en vrouwen, die de machines bedienen en de werking controleren. In een geautomatiseerde fabriek zijn deze mannen en vrouwen verdrongen, omdat zelfs de bediening en de controle is overgenomen door machines. Tot nu toe is de automatisering het verst gevorderd in de olie- en chemische industrie. Daar is een voortdurende stroom van materialen, die in beweging is en wordt veranderd volgens een vaststaand schema. Meetinstrumenten op belangrijke punten van het proces vertellen ons de temperatuur, de druk, de stroomsnelheid en doen andere van belang zijnde metingen. Als een van deze metingen niet is zoals het zou moeten zijn, neemt de machine die dit proces controleert, onmiddellijk de nodige stappen om de fout te corrigeren. Zo zal er bijvoorbeeld, als een van de materialen te langzaam toestroomt, een kraan worden geopend waardoor het sneller gaat stromen. Stroomt er teveel toe, dan wordt de kraan iets gesloten om de stroom te verminderen.

Componisten en vertalers

Het aantal werkzaamheden dat rekenmachines kunnen uitvoeren, wordt met de dag groter. Wanneer een reuzenradiotelescoop is afgestemd op de berichten, die worden uitgezonden door een raket in de interplanetaire ruimte, leidt een rekenmachine het draaien van de telescoop zodanig, dat deze steeds in de juiste richting staat. Er zijn rekenmachines, die een partij schaak spelen en er zijn er ook, die eenvoudige liedjes componeren. Sommige rekenmachines zijn loodsen, die schepen besturen. Andere zijn talenspecialisten, die boeken en tijdschriftartikelen vertalen van de ene in de andere taal.

Het denken van een rekenmachine

We noemen een automatische rekenmachine wel een „denkende machine" of een „elektronisch brein". Deze uitdrukkingen zijn wel dramatisch, maar niet erg nauwkeurig. Zij wekken de schijn, dat rekenmachines op dezelfde wijze kunnen denken als de menselijke hersenen.

Ruwweg gesproken zijn er twee soorten menselijk denken. Zo bestaat er *creatief* denken, dat is gebaseerd op fantasie en inzicht. Dit is het soort denken, dat zich in zijn hoogste vorm ontplooit bij een Beethoven als hij een symfonie componeert of een Shakespeare als hij een toneelstuk schrijft of een Einstein, wanneer hij een nieuwe wetenschappelijke theorie formuleert. Dat soort denken gaat langs niet te voorziene wegen en volgt geen vaste regels.

Ook is er routine-denken, dat geen speciaal talent vergt. Het volgt speciale vastgestelde regels langs een weg, die gemakkelijk van tevoren is uit te stippelen. Iedere schooljongen die de regels kent, kan een rekenkundig vraagstuk uitdenken, kan een kwadratische vergelijking oplossen of kan een stukje in eenvoudig Frans vertalen. Het is alleen maar dit soort routine-denken, dat de zogenaamde „denkende machine" doen kan. Het feit dat het routine-denken is, maakt echter niet dat het onbelangrijk is. Een groot gedeelte van het denken, dat wij in ons dagelijks leven doen is van dit routine-type. En omdat het routine is, is het ook dikwijls gecompliceerd en tijdrovend. We besparen zeer veel tijd en energie en voorkomen vele fouten wanneer we de machine dit soort denken van ons laten overnemen. Daarbij komt nog, dat het geen kwestie van routine is een machine te ontwerpen, die het routine-denken van ons kan overnemen. Achter het routine-denken van de machine staat het creatieve denken van de mens, die haar heeft uitgevonden.

De denkende machine is een van de grootste wonderen van de twintigste eeuw. Hoe zijn we erin geslaagd haar te laten denken? Om deze vraag te kunnen beantwoorden, moeten we eerst nog twee andere vragen onderzoeken. Wat is een machine? En wat is de aard van het routine-denken dat we op de machines afwentelen? Op deze vragen worden in de hoofdstukken die volgen, nader ingegaan.

HOOFDSTUK II

WERKTUIGEN, DIE ZICHZELF BEDIENEN

Verlengstukken van het lichaam

Denkende machines zijn werktuigen van een speciale soort. Net als andere werktuigen dienen zij tot levenloze verlengstukken van het menselijke lichaam. Hamers zijn verlengstukken van onze handen; zij vergroten de kracht waarmee de hand een slag kan geven. Pincetten zijn eveneens verlengstukken van de hand: zij verkleinen de kracht waarmee we dingen aanpakken, zodat we kleine en tere voorwerpen kunnen hanteren zonder ze te vernielen. Telescopen en microscopen zijn verlengstukken van het oog. Telefoons van het oor. Auto's en treinen zijn verlengstukken van onze benen. Op dezelfde wijze zijn denkende machines verlengstukken van de menselijke hersenen.

De ontwikkeling van de werktuigen

De werktuigen, die wij gebruiken, hebben drie stadiums van ontwikkeling doorgemaakt. Het eerste stadium is dat van het handgereedschap. Het handgereedschap is ontworpen om een of meer specifieke karweitjes op te knappen. Een hamer bij voorbeeld kan een spijker inslaan. Zij kan ook een klauw hebben om spijkers uit te trekken. Maar handgereedschap kan dit werk niet alleen doen. Een menselijke spier moet het gereedschap zwaaien en een menselijk brein moet de spier sturen.
De tweede trap is die van het krachtwerktuig. Dit is het stadium, dat meestal wordt bedoeld als we het woord „machine" gebruiken. In dit stadium is de menselijke spier vervangen door een machine, een levenloze krachtbron. Maar het werktuig en de machine, die het aandrijft, worden nog steeds door de menselijke hersenen bestuurd. Dikwijls is het krachtwerktuig in staat een aantal bepaalde bewerkingen uit te voeren. Het kan zodanig worden ingesteld, dat het al deze bewerkingen in een vastgestelde

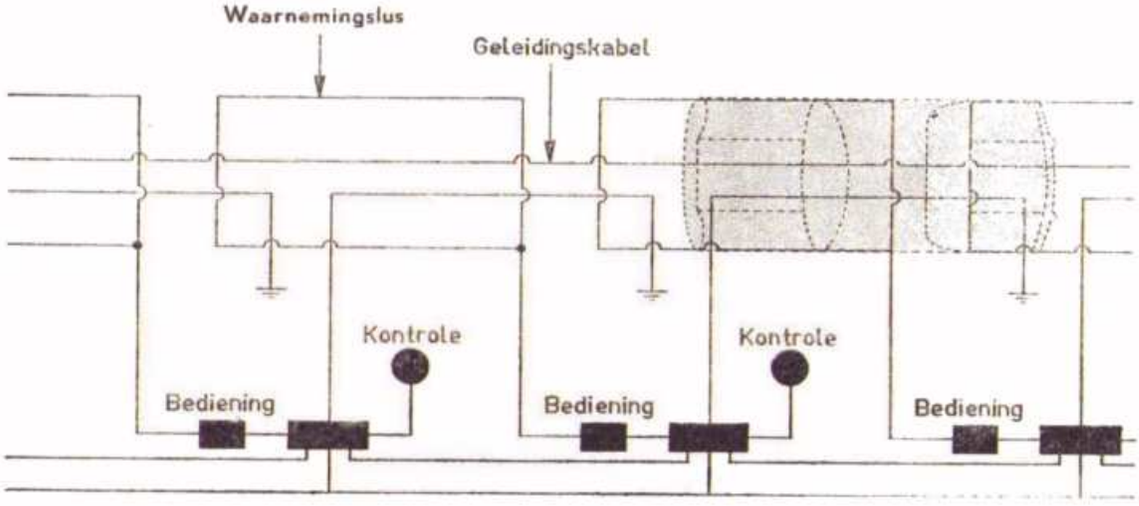
volgorde verricht. Of het kan verschillende handelingen uitvoeren, die worden uitgekozen voor verschillende doeleinden. Maar die keuze komt altijd tot stand in de hersenen van de mens, die deze machine bedient.
Het derde stadium is dat van de automatische machine. Het belangrijkste kenmerk van de automatische machine is, dat het een machine is, *die zichzelf bedient*. Wanneer zij slechts één bewerking kan doen, besluit zij zelf wanneer te beginnen en wanneer te stoppen. Kan zij vele bewerkingen uitvoeren, dan besluit zij zelf welke bewerkingen te doen en in welke volgorde. Dat zijn geen vrije besluiten. Zij worden genomen volgens vastgestelde regels, die in de werking van de machine zijn ingebouwd. In dit stadium heeft het ingebouwde bedieningsmechanisme de leidende functie overgenomen, die vroeger was toevertrouwd aan de menselijke hersenen. Zij werkt als een levenloos verlengstuk van onze hersenen. Alle machines die „denkende machines" worden genoemd, zijn werktuigen uit dit derde stadium van ontwikkeling.
Hier is een eenvoudig voorbeeld van een werktuig, dat alle drie de stadiums van ontwikkeling doorloopt:
Veronderstel, dat de warmte van een kamer wordt geleverd door een oliebrander. Veronderstel verder, dat we een gesloten stroomkring maken van de oliebrander en een spanningsbron en dat we dan de stroomkring verbreken door een van de verbindingsdraden door te knippen. We kunnen de stroomkring weer sluiten en de brander weer in werking stellen door in iedere hand een van de uiteinden van de doorgeknipte draad te nemen en de einden tegen elkaar te drukken. Dit is wel niet zo heel verstandig, want zelfs als de draden geïsoleerd zijn blijft het gevaar voor een elektrische schok toch altijd nog bestaan. Een betere methode is de twee uiteinden van de draad te verbinden met de klemmen van een hefboomschakelaar. Dan kunnen we de stroomkring sluiten door de schakelaar in te zetten. De schakelaar is nu een werktuig, dat van onze handen de taak overneemt om de stroomkring te sluiten. Het is een handwerktuig, want we gebruiken de spieren van onze hand om de schakelaar te laten werken. We kunnen de schakelaar veranderen in een krachtwerktuig als we er een klok aan toevoegen, zodanig, dat de klok de schakelaar 's morgens sluit om de oliebrander aan te zetten en 's avonds opent om de brander weer uit te schakelen. Tenslotte kunnen we nog een stap verder gaan en de schakelaar veranderen in een automatisch werktuig door er een thermostaat aan toe te voegen. Dan bedient de thermostaat de schakelaar, die de oliebrander aan- en uitschakelt.

De thermostaat „besluit" de oliebrander in te schakelen als de kamer te koud is. Hij „besluit" ook weer de oliebrander uit te schakelen als het te warm wordt. Hij neemt deze besluiten ten gevolge van zijn constructie. Een van de contacten van de schakelaar is aangebracht op een dun staafje, dat bestaat uit twee metalen plaatjes, die rug aan rug op elkaar zijn gelast. Ieder van deze metalen zet uit wanneer het warmer wordt en krimpt wanneer het kouder wordt. Maar zij zetten uit en krimpen in verschillende mate. Het gevolg daarvan is, dat het staafje krom trekt als het warmer wordt, waardoor de contactpunten van de schakelaar van elkaar worden getrokken. De schakelaar is dan geopend en de oliebrander wordt uitgeschakeld. Later, als het staafje weer voldoende is afgekoeld, wordt het weer recht. De contactpunten worden weer naar elkaar toe gebracht tot zij elkander raken. De schakelaar is nu weer gesloten en de oliebrander wordt ingeschakeld. Een schakelaar met thermostaat is een automatisch werkend werktuig omdat zij een ingebouwde zelfbediening heeft.

Autorijden

Om te kunnen begrijpen wat er voor nodig is een machine zichzelf te laten bedienen, zullen we eens een andere bekende situatie onder de loupe nemen, namelijk het rijden met een auto. We letten eerst eens op de handgrepen van iemand, die autorijles heeft. Zijn instructeur zit naast hem en vertelt hem wat hij moet doen. Nadat hij in de eerste versnelling is weggereden zegt de instructeur: „Voet van het gaspedaal nemen, koppeling intrappen en overschakelen naar de tweede, laat de koppeling langzaam opkomen en gas geven". Later, wanneer ze in druk verkeer rijden, kan de instructeur b.v. zeggen: „U komt te dicht bij de wagen daar voor u, rem iets intrappen". Wie is nu in deze situatie de eigenlijke bestuurder van de auto? Blijkbaar is het de instructeur en niet de bestuurder. De instructeur neemt alle beslissingen. Zijn instructies zijn seinen, die de bestuurder tot handelingen aanzet. De bestuurder bedient de auto nog niet tot op het ogenblik, dat hij, na voldoende ervaring te hebben opgedaan, zelf zijn beslissingen begint te nemen en zichzelf de tekens geeft, die zijn handelingen bepalen. De geroutineerde rijder hoort het geluid van de motor als hij in de eerste versnelling wegrijdt en ziet dat de auto sneller gaat rijden. Hij herkent het ogenblik waarop hij naar de tweede versnelling moet overschakelen aan wat hij hoort en ziet en voelt. *De basis van zijn*

autorijden is het feit, dat hij de uitwerking waarneemt van zijn eigen handelingen en dat deze waarnemingen worden omgezet in seinen, die zijn volgende handelingen inleiden.
Wanneer een mechanisme de resultaten van zijn werk kan bespeuren en dan bediend wordt door deze resultaten dan zeggen technici, dat het *terugkoppeling* heeft. Wanneer we nu een dergelijk terugkoppelsysteem in een auto kunnen inbouwen, dan hebben we de bestuurder niet meer nodig en hebben we een auto, die zichzelf bestuurt. Een stap in die richting is al ondernomen door de General Motors en de Radio Corporation of America.



Systeem voor automatisch geleid autoverkeer.

Zij hebben een systeem ontwikkeld voor het automatisch besturen van een auto, die op een verkeersweg rijdt. De auto bespeurt de resultaten van zijn eigen bewegingen door middel van een elektronisch terugkoppelsysteem, dat in de weg en de auto is ingebouwd. Een geleidingskabel in het wegdek waarschuwt de auto zodra hij van zijn baan afwijkt. Waarnemingslussen in het wegdek „voelen" de aanwezigheid van andere auto's, die ervoor rijden. Komt de auto te dicht bij een, die ervoor rijdt, dan stelt het terugkoppelsysteem de rem van de auto in werking om hem langzamer te laten rijden.

De sleutel tot zelfbediening

Terugkoppeling is de sleutel tot de zelfbediening. Om een machine automatisch te maken moeten wij haar voorzien van een terugkoppelmecha-

nisme. Dat wil zeggen dat wij haar moeten voorzien van een middel om de resultaten van haar eigen handelingen te kunnen constateren. De verschillende resultaten moeten een daarbij behorend sein opwekken.
De werking van de machine moet dan volgens een vooropgezet plan worden geleid door deze seinen.

Automatische rekenmachines

De uitdrukking „denkende machine" wordt het meest gebruikt in verband met automatisch werkende rekenmachines. Deze machines „denken" in dubbele zin. Ten eerste doen zij, als werktuigen, die berekeningen uitvoeren, dienst als verlengstuk van onze hersenen. Ten tweede verrichten zij, doordat zij automatisch zijn, de bedienende functie, die vroeger van de hersenen uitging. Deze twee soorten denken zijn verschillend en worden verricht door afzonderlijke onderdelen van het elektronische brein. Het ene deel is de rekenaar, die kan rekenen, wanneer het wordt voorgeschreven wat te doen. Het andere deel is de bedieningseenheid, die de rekenaar zegt wat hij doen moet.

HOOFDSTUK III

EEN IDIOOT TOT DENKEN BRENGEN

We maken het ingewikkelde eenvoudig

Een speciaal werktuig kan slechts enkele eenvoudige handelingen verrichten. Een rekenmachine is in dit opzicht al net als alle andere werktuigen. Zij werkt op zekere, vooraf vastgestelde manieren. Deze zijn eenvoudig van natuur en gering in aantal. De machine is als een idioot, die alleen maar op commando beweegt en die slechts een beperkt aantal opdrachten begrijpt en kan uitvoeren. Niettemin gebruiken we dergelijke machines voor het uitvoeren van zeer ingewikkelde berekeningen. We hebben de idioot veranderd in een wiskundige. Hoe is deze verandering tot stand gekomen? Hoe krijgen we een eenvoudige machine zo ver, dat zij een ingewikkeld werk doet? Dat doen we door eerst het ingewikkelde werk eenvoudig te maken. We verdelen het werk in een opeenvolging van kleine stappen, die ieder voor zich eenvoudig zijn en vallen binnen de mogelijkheden welke de machine heeft. Dan zien we erop toe, dat de machine deze stappen in de juiste volgorde uitvoert.
Een bekend voorbeeld van deze gang van zaken zien we in de werking van een breimachine. Sweaters kunnen gebreid zijn in zeer uiteenlopende ingewikkelde breisteken. Maar al deze steken, het doet er niet toe hoe ingewikkeld, zijn opgebouwd uit een reeks eenvoudige brei-handelingen, zoals *rechts, averechts, meerderen, minderen, af laten glijden* en *omslaan.* De breimachine is ontworpen om al deze eenvoudige handelingen uit te voeren.
Om de machine een ingewikkeld patroon te laten breien beginnen we met de aard vast te stellen van de reeks handelingen, die moeten worden verricht om tot dat patroon te komen en dan de machine te instrueren deze reeks handelingen uit te voeren.
Wanneer een machine elektrisch wordt bediend, kan haar werking worden gestuurd door het openen en sluiten van schakelaars. Een speciaal stel schakelaars zal een zekere handeling, die de machine kan verrichten, be-

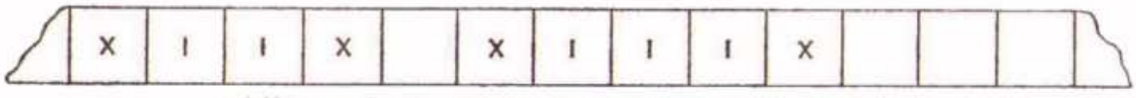
sturen. De schakelaars zelf kunnen worden geopend of gesloten door middel van elektrische signalen. Door deze signalen in een zekere volgorde aan de machine toe te voeren kunnen we de machine ertoe brengen een speciale reeks handelingen te verrichten. Wanneer een machine een sweater breit, kan iedere handeling, die daarvoor nodig is, van tevoren in tabellen of ponskaarten worden vastgelegd. We kunnen een dergelijke machine een volledige reeks instructies geven voor zij gaat werken. De situatie is bij een machine, die berekeningen uitvoert iets anders. Het is niet mogelijk van tevoren alle stappen vast te leggen, die moeten worden genomen, omdat enkele van de latere stappen afhangen van de uitkomst van voorafgaande bewerkingen. Als bij voorbeeld de machine een aantal getallen van twee cijfers moet optellen, weten we niet of zij een cijfer naar de tweede kolom moet overbrengen, voordat de som van de eerste kolom bekend is. Ten einde met deze situatie rekening te houden geven we de machine verschillende stellen instructies. Daarna geven we de machine de algemene opdracht om, na iedere handeling die zij verricht, eerst de uitkomst van die stap te bekijken en dan de betreffende opdrachten uit te kiezen voor de volgende bewerking. Hierbij gaat het terugkoppelmechanisme van de machine meespelen.

De machine van Turing

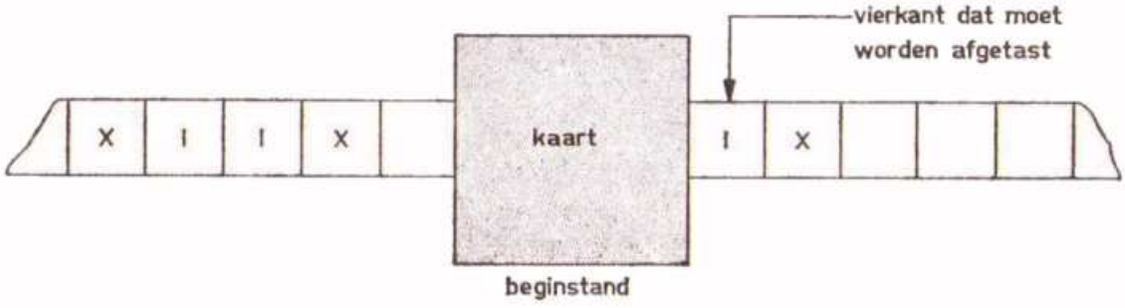
Om concreet aan te tonen hoe een eenvoudige machine het vermogen kan worden gegeven ingewikkelde berekeningen uit te voeren, zullen we een machine beschrijven, die werd ontworpen door de overleden Engelse wiskundige A. M. Turing. De machine van Turing is volkomen denkbeeldig. Zij is ontworpen voor zuiver theoretische doeleinden. Een werkend model kan gemakkelijk worden gemaakt, want er zijn onderdelen verkrijgbaar, die in staat zijn de handelingen uit te voeren, die we van de machine verwachten. Maar we vragen u niet een model te maken om te zien hoe het werkt. In plaats daarvan stellen we u voor, dat u zichzelf de rol van de machine toedenkt. Laten we aannemen, dat u de machine bent. Volg blindelings de instructies, die aan de machine worden gegeven, net zoals een levenloos mechanisch werktuig zou doen. Op deze wijze zult u volledige waardering krijgen voor het geheugenloos denken, dat de machine doet.

De machine van Turing heeft de volgende onderdelen: een papierstrook,

die in vierkanten is verdeeld; een motor, die deze strook voortbeweegt; een aftastinrichting om te kunnen lezen wat erop de strook staat; een schrijfinrichting, die een *X* of een 1 kan schrijven of ze kan uitvegen, een schijf met cijfers en een aanwijsnaald en een bedieningseenheid, die aan de machine vertelt wat zij moet doen. De machine kan alleen de volgende eenvoudige bewerkingen verrichten: zij kan een *X* of een 1 schrijven in een leeg vierkantje. Zij kan ook een *X* of een 1 uitvegen, wanneer die al in de vierkantjes staan. Zij kan de strook over een afstand van één vierkantje naar links of naar rechts verplaatsen. Zij kan een toepasselijk signaallampje laten oplichten en dan stoppen als haar werk is gedaan. In een mechanisch model zal de bedieningseenheid bestaan uit een elektronisch apparaat, dat signalen van de aftaster en de nummerschijf ontvangt na iedere bewerking. Deze signalen zullen schakelaars in werking stellen, die de volgende handeling van de machine inleiden.



notities op de strook voor de vermenigvuldiging van 2x3



beginstand

De machine van Turing

Voor ons doel zal het bedieningsapparaat niet meer zijn dan een eenvoudige tabel, waaruit u de instructies voor de machine kunt aflezen.
Om nu net te doen of we de machine zijn moeten we eerst de volgende uitrusting klaar maken: een potlood, een gommetje, een smalle strook papier, die in vierkantjes is verdeeld, een schoon velletje papier en een kaart. Het vel papier zal dienst doen als „nummerschijf". We schrijven er het cijfer 1 op. Wanneer u de opdracht krijgt de instelling van de schijf te veranderen, streep dan het laatste cijfer door of gom het uit en schrijf de nieuwe instelling ervoor in de plaats. De kaart doet dienst om de stand

van de aftaster aan te geven. We leggen de papierstrook onder de kaart, zodanig, dat een gedeelte aan de rechterkant buiten de kaart uitsteekt. Het eerste vierkantje rechts naast de kaart is het vierkantje, dat wordt afgetast.

We schrijven op de strook op de meest primitieve wijze cijfers in de vorm van reeksen van het cijfer 1. De *X*-en worden gebruikt om aan te geven waar een cijfer begint en eindigt. Laten we beginnen met op de strook de getallen 2 en 3 te schrijven op de wijze, zoals dat in onderstaande figuur is gedaan. Nu leggen we de strook onder de kaart, zodanig, dat de laatste 1 helemaal rechts in de positie is om te worden afgetast. Dit is de positie waar de machine van uitgaat. Nu zullen we eens laten zien hoe de machine wordt losgelaten op de taak enkele rekenkundige bewerkingen met de cijfers op de strook uit te voeren. Voor deze taak wordt eerst een programma uitgewerkt en genoteerd in de programmatabel. De tabel is onafhankelijk van de getallen, die op de strook zijn geschreven. Het hindert niet welke getallen dit zijn, de machine behoeft alleen maar de instructies op te volgen welke in de tabel zijn opgenomen en zij zal automatisch de opdracht uitvoeren en stoppen wanneer haar taak is volbracht. Het antwoord zal op de strook verschijnen in de vorm van een reeks cijfers 1.

De cijfers 1 tot 6 in de eerste kolom stellen instellingen van de machine voor. De symbolen boven de tabel: een leeg vierkantje, een vierkantje met een *X* en een vierkantje met een 1, stellen voor wat de aftaster te zien kan krijgen. Door de tabel nu af te lezen op het kruispunt van de instelling van de nummerschijf en de kolom, die aangeeft wat de aftaster ziet, krijgt de machine de instructies voor de volgende stap. Deze instructies bestaan uit twee gedeelten: een letter en een cijfer. De letters kunnen zijn een *C, X, G, R* of *L*.

C wil zeggen: schrijf het cijfer 1 in het vierkantje dat wordt afgetast. *X* wil zeggen: schrijf een *X*. *G* betekent dat u moet uitgommen wat er in het vierkantje staat. *R* geeft aan, dat u de strook 1 vierkantje naar rechts moet schuiven en *L:* schuif de strook een vierkantje naar links. Het cijfer in de instructies wil zeggen dat de nummerschijf op dat cijfer moet worden ingesteld. Een vraagteken in de tabel betekent: „Wat is er aan de hand? U maakte ergens een fout". Een uitroepteken zegt: „Stop. De opdracht is volbracht".

Zo is b.v. in de startpositie de stand van de nummerschijf 1, en de aftaster ziet het cijfer 1. U vindt nu in de tabel de volgende instructies op het

kruispunt van de regel waarvoor een 1 staat en de kolom waar een 1 boven staat. Deze instructies zijn: „*R*1" of wel: „Verplaats de strook 1 vakje naar rechts en zet de nummerschijf op 1". Nadat dit is gedaan, staat de nummerschijf nog steeds op 1 en de aftaster ziet rechts van de kaart weer een 1.

Programma tabellen voor de machine van Turing

Programma voor optellen

	□	X	1
1	*D*6	*E*2	*R*1
2	*R*2	*E*3	?
3	*R*3	*E*4	*E*5
4	*L*4	?	*R*6
5	*L*5	?	*R*1
6	*X*6	!	*R*3

Programma voor machtsverheffen

	□	X	1
1	?	*R*2	*R*1
2	*R*2	*E*3	?
3	*R*3	*E*12	*E*4
4	*L*4	*L*5	?
5	?	?	*E*6
6	*L*6	*L*7	*L*6
7	*D*8	?	*L*7
8	*L*9	*R*8	*R*8
9	*L*9	*R*10	*E*6
10	*D*10	*R*11	*R*10
11	*R*11	*E*12	*E*4
12	*L*12	*E*13	?
13	*L*13	*L*14	*E*13
14	*X*15	*L*14	*L*14
15		!	

Programma voor vermenigvuldigen

	□	X	1
1	*R*2	*R*1	*R*1
2	*R*2	*E*3	?
3	*L*3	*L*4	*L*4
4	*D*5	*L*4	*L*4
5	*X*5	*R*6	*L*5
6	*R*7	*R*6	*R*6
7	*R*7	*R*8	*E*8
8	*L*8	*L*8	*E*9
9	*L*9	*L*10	*L*9
10	*L*10	*L*10	*E*11
11	*L*11	*L*12	*L*11
12	*D*13	?	*L*12
13	*L*14	*R*13	*R*13
14	*D*15	*R*15	*E*11
15	*D*15	*R*16	*R*15
16	*L*17	*R*16	*R*16
17	?	*L*18	*E*9
18	?	*L*18	*E*19
19	*X*19	*L*20	?
20	?	*L*21	*E*19
21	*X*21	*R*22	*L*21
22	*D*23	*R*22	*R*22
23	*D*23	*R*24	*R*23
24	*R*24	*E*25	*E*8
25	*L*25	*E*26	?
26	*L*26	*E*27	*E*26
27	*L*27	*E*27	*R*28
28	*X*28	!	

De instructies voor de tweede stap zijn dus gelijk aan die voor de eerste (*R*1). Nadat de derde stap is volbracht staat de nummerschijf op 1 en de aftaster ziet een *X*. De instructies zijn nu „*G*2", dus: „Gom de *X* uit en zet de nummerschijf op 2". Het resultaat daarvan is, dat de nummerschijf op 2 staat en de aftaster een blank vierkantje ziet. Voor de vijfde stap luiden de instructies dan: „*R*2" of wel „Verschuif het strookje een plaats naar rechts en zet de nummerschijf op 2". De lezer wordt aangeraden de instructies zelf stap voor stap te volgen tot de gehele berekening gereed is.

Wanneer u de tijd en het geduld heeft maakt u dan ook eens een andere optelling met grotere getallen. Denk eraan steeds te beginnen met de nummerschijf op 1 en de strook in de bovengenoemde startpositie.
De andere tabellen op blz. 14 geven de programma's voor het uitvoeren van een vermenigvuldiging en het machtsverheffen. Wanneer deze laatste tabel wordt gebruikt, is het cijfer rechts op de strook het grondtal en het cijfer links de exponent. Als b.v. de cijfers 2 en 3 zijn genoteerd op de wijze als in de fig. op pag. 12 is aangegeven, dus de 2 links en de 3 rechts, dan moet het getal 3 tot de tweede macht worden verheven. Om 2 tot de derde macht te verheffen moet de 3 links en de 2 rechts worden genoteerd.
Wanneer u een volledig voorbeeld uitwerkt van een optelling zult u zien, dat de machine de twee getallen, die op de strook zijn geschreven optelt door de beide reeksen cijfers 1 te combineren tot een enkele reeks. Gebruikt u de programma-tabel voor vermenigvuldigen, dan zult u zien dat de machine vermenigvuldigt door herhaald op te tellen. Op dezelfde wijze is machtsverheffen herhaald vermenigvuldigen. Ingewikkelder berekeningen worden uitgevoerd door de eenvoudige bewerkingen te herhalen.
De machine van Turing is geen praktische rekenmachine. Zij schrijft getallen op door de bewerkelijke methode van het neerschrijven van lange reeksen van het cijfer 1. Zij maakt berekeningen door deze 1-en stuk voor stuk over lange stroken papier te verplaatsen. De werking van een werkend model zou van mechanische bewegingen afhankelijk zijn, nl. het verschuiven van de strook telkens een vakje vooruit of terug. Door dit alles zou de machine van Turing te langzaam werken om de berekeningen te kunnen uitvoeren, die in het eerste hoofdstuk zijn beschreven. Een werkelijk bruikbare rekenmachine zou aan twee eisen moeten voldoen:

1. zij zou een economisch systeem moeten bezitten om cijfers vast te leggen;
2. zij zou in staat moeten zijn berekeningen zeer snel uit te voeren.

Aan de eerste eis wordt voldaan door toepassing van een systeem, waarbij de plaats de waarde van een cijfer aangeeft (positioneelsysteem). De arabische cijfers die wij iedere dag gebruiken, voldoen aan dit positionele systeem. Het is echter niet het enige. Onder de vele mogelijke positionele systemen is er een dat het beste voldoet voor het gebruik in rekenmachines. We zullen dat systeem in het volgende hoofdstuk leren kennen.
Aan de tweede eis wordt voldaan als we een rekenmachine bouwen uit onderdelen, die kunnen werken zonder mechanische bewegingen. Machine-

onderdelen, die deze eigenschap bezitten zijn die, welke zijn opgebouwd uit elektronische schakelingen. Zij werken met behulp van impulsen van een elektrische stroom. Elektronische apparaten kunnen gemakkelijk per seconde wel een miljoen impulsen opwekken en verwerken. Aangezien iedere impuls ruwweg overeenkomt met één stap in een eenvoudige berekening, kan een elektronische rekenmachine ongeveer een miljoen bewerkingen per seconde uitvoeren. Bij deze snelheid worden zelfs ingewikkelde berekeningen met grote snelheid uitgevoerd.

De onderdelen van een automatische rekenmachine

Hoewel de machine van Turing geen praktische rekenmachine is, kunnen we toch van haar leren. We vinden er alle belangrijke onderdelen in terug, die een automatische rekenmachine moet bevatten. Wanneer we ze in werking zien werpen zij vragen op, die beantwoord moeten worden voor we overeenkomstige onderdelen kunnen ontwerpen voor een elektronische rekenmachine.

Iedere automatische rekenmachine heeft een *rekeneenheid,* die de eigenlijke berekeningen uitvoert. In de machine van Turing wordt deze rekeneenheid gevormd door de papierstrook, die heen en weer wordt geschoven, het potlood en het gommetje, waarmee 1-en en *X*-en worden genoteerd of uitgegomd. De rekeneenheid kreeg deze speciale vorm in verband met de methode, die werd gebruikt voor het noteren van getallen. Zo zien we, dat het systeem, dat wordt toegepast voor het opschrijven van de cijfers voor een deel al de vorm bepaalt van de rekeneenheid. Aangezien we een positioneel systeem zullen gebruiken voor het opschrijven van de getallen moeten we ons verdiepen in de vraag „Hoe kunnen elektronische schakelingen worden ontworpen, die in staat zijn getallen voor te stellen, die in het positionele systeem zijn opgeschreven en hoe kunnen we daar berekeningen mee uitvoeren?" Om deze vraag te kunnen beantwoorden moeten we eerst vertrouwd raken met de verschillende manieren om getallen op te schrijven (hoofdstuk IV) en met verschillende apparaten, zowel mechanische als elektrische, om berekeningen mee te maken (hoofdstuk VI).

Iedere automatisch werkende rekenmachine heeft een *programma-eenheid* die de rekeneenheid bestuurt. Bij de machine van Turing gaf de programma-eenheid de opdrachten, die we hadden vastgelegd in de programmatabellen. In een elektronische rekenmachine is de programma-eenheid zelf

een elektronisch apparaat. We moeten dus de vraag beschouwen: „Hoe kan een elektronisch apparaat dergelijke opdrachten aan een rekenmachine geven?" We komen steeds meer van dergelijke vragen tegen, die we nader moeten onderzoeken, wanneer we nagaan welke vorm het bedieningssysteem van de machine van Turing heeft. De commando's voor iedere handeling hingen af van de stand van de nummerschijf en van wat de aftaster zag voor een nieuwe bewerking werd uitgevoerd. Wanneer de machine een optelling maakte, kon de nummerschijf staan op 1 *of* 2 *of* 3 *of* 4 *of* 5 *of* 6. De aftaster zou een vierkantje kunnen zien dat blank was, *of* waarin een 1 stond *of* een *X*. De tabel waarin de opdrachten staan is feitelijk een verkorte wijze voor het opschrijven van uiteenzettingen als: *Als* de nummerschijf op 2 staat *en* het vierkantje, dat moet worden afgetast een *X* bevat, gom *dan* de *X* uit *en* zet de nummerschijf op 3. In bovenstaande regels, die omschrijven wat de nummerschijf doet, wat de aftaster ziet en wat de bedieningstabel zegt, zijn de sleutelwoorden: *of, en, als* en *dan*. Deze woorden vertegenwoordigen zekere logische begrippen. We moeten dus de rol nagaan, die deze begrippen spelen bij logisch denken en ons dan bezighouden met de vraag: „Hoe kunnen we een elektronisch apparaat tot deze wijze van denken brengen?" Daarom houden we ons in de hoofdstukken VII, VIII, IX en X bezig met de logica en de algebra van Boole en hun verband met het ontwerpen van apparaten.

Iedere automatische rekenmachine heeft een *geheugen-eenheid*. Bij de machine van Turing was de nummerschijf een zeer primitieve geheugeneenheid. Zij hield gegevens vast, welke werden afgeleid van vorige stappen, wanneer deze gegevens nodig waren om latere stappen te leiden. In een elektronische rekenmachine zijn de geheugeneenheden elektrische of magnetische toestellen. We moeten ingaan op de vraag: „Hoe kunnen deze toestellen dingen als cijfers en opdrachten voor de rekenmachine vasthouden en op het juiste moment weer afgeven?" Deze vraag wordt in hoofdstuk XI nader bekeken.

Iedere automatische rekenmachine heeft een *ingangseenheid* en een *uitgangseenheid*. De ingangseenheid levert aan de machines de gegevens waarmee zij moet werken en speciale opdrachten voor de bewerking, die moet worden uitgevoerd. De uitgangseenheid levert de resultaten af van de berekeningen, die de machine heeft uitgevoerd. De ingang en uitgang van de machine van Turing waren de geschreven symbolen op de strook. De vorm die zij aannemen in elektronische rekenmachines zullen in hoofdstuk XI worden beschreven.

HOOFDSTUK IV

CIJFERS EN GETALLEN

Alle getallen, die we gebruiken zijn afgeleid van de natuurlijke getallen, dat zijn de getallen, die we bij het tellen gebruiken. Het zijn de getallen *nul, een, twee, drie* enzovoort. Om deze getallen te kunnen voorstellen gebruiken we twee verschillende methoden. De ene methode is de waarde van het *getal* hardop uit te spreken of volledig gespeld op te schrijven. *Een, elf, honderd* en *miljoen* zijn daar voorbeelden van. De andere methode is het gebruik van *cijferreeksen*. Deze worden alleen gebruikt voor het opschrijven van getallen. Wanneer we het echter hardop lezen zeggen wij *de waarde van het getal* dat met deze cijferreeks overeenkomt. 1, 11, 100 en 1 000 000 zijn voorbeelden van deze cijferreeksen. Maar denk er wel aan, dat u, als u ze opleest, zegt: „een, elf, honderd en miljoen, dus de overeenkomstige waarde."
Er zijn verschillende methoden om de waarde aan te geven van natuurlijke getallen. In feite heeft b.v. iedere taal haar eigen woorden voor de waarde van de getallen. Het cijfer, dat wij *twee* noemen, heet in het Frans *deux,* in het Duits *zwei,* in het Engels *two* enz. En zo zijn er ook verschillende methoden om deze getallen op te schrijven. Als wij het cijfer 2 gebruiken, gebruiken de Romeinse de letter II, terwijl de oude Hebreeuwen het symbool ב gebruikten, een van de letters van het Hebreeuwse alfabet. In dit hoofdstuk zullen we verschillende talstelsels bespreken. Bijgevolg kunnen we verschillende geschreven symbolen gebruiken om een zeker getal op te schrijven. Om verwarring te voorkomen spreken we echter af, dat we slechts één naam aan ieder getal zullen geven, nl. die welke wij in het Nederlands gebruiken. Wij zullen dus, ook al gebruiken we verschillende symbolen voor het cijfer, dat wij normaal als een 2 schrijven, het getal steeds *twee* blijven noemen, zodat er geen verwarring over kan ontstaan welk getal er wordt bedoeld.

Een alfabet voor getallen

De reeks natuurlijke getallen *nul, een, twee, drie enz.* is zonder eind. Wanneer we voor ieder van deze getallen een apart cijferteken zouden

willen hebben, zouden we daarvoor een oneindig aantal nodig hebben. Een van de manieren om dat te bereiken is een verschillend symbool voor alle getallen te bedenken. Deze wijze van getallen schrijven zou overeenkomen met de wijze waarop de Chinezen woorden schrijven. In de Chinese taal bestaat er een apart symbool voor ieder woord. Om Chinees te leren lezen is het nodig duizenden van deze symbolen te leren. In het Nederlands en ook in de meeste andere talen omzeilen we deze moeilijkheid door gebruik te maken van een alfabet, dat uit slechts 26 symbolen bestaat. Alle geschreven woorden stellen we samen uit deze symbolen. Op dezelfde wijze heeft men ook een efficiënter systeem ontwikkeld voor het opschrijven van getallen door deze op te bouwen uit een beperkt aantal symbolen, een soort alfabet van cijfers dus, die we achter elkaar kunnen plaatsen om ieder willekeurig getal mee te vormen.

We kunnen b.v. voor een alfabet voor getallen de symbolen 0, 1 en + gebruiken in hun normale betekenis. We kunnen dan alle getallen groter dan 1 schrijven door een voldoend groot aantal cijfers 1 bij elkaar op te tellen. Bij dit systeem zou dus 1 + 1 het getal 2 betekenen, 1 + 1 + 1 het getal 3 en zo voort. Dit systeem werd toegepast in de machine van Turing, behalve dan dat we daarbij het + teken weglieten. Primitieve volksstammen gebruikten hetzelfde systeem toen zij inkepingen in bomen sneden of krasjes in het zand maakten. Het systeem is bruikbaar zolang we met kleine getallen hebben te doen. Maar het wordt erg omslachtig zodra grote getallen nodig zijn. Om deze reden werd de methode van het herhalen van het cijfer 1 in alle delen van de wereld afgedankt ten gunste van een beter alfabet voor getallen.

Nieuwe alfabetten voor getallen ontstonden uit de gewoonte dingen in groepen uit te tellen. Omdat we vijf vingers aan elke hand hebben, werden meestal groepen van 5 of 10 gebruikt. Door enkele volkeren in verschillende delen van de wereld werden echter ook groepen van twaalf, twintig of zestig gebruikt. Het gebruik van groepen voor het tellen hield in, dat speciale notities werden gebruikt om het aantal dingen van een groep aan te geven. In de meeste gevallen werden hiervoor nieuwe symbolen gebruikt. In het systeem met Romeinse cijfers wordt b.v. de vijf aangeduid als V, tien met X en zo voort. Bij enkele talstelsels werd het aantal per groep niet door een nieuw symbool aangegeven, maar met een oud symbool, dat op een speciale plaats werd gezet. Stelsels waarbij deze methode wordt toegepast, heten positionele systemen. Het systeem met Arabische cijfers, dat wij heden toepassen, is een positioneel systeem.

Arabische cijfers

Wanneer we bij het Arabische systeem, dat wij tegenwoordig gebruiken voor het opschrijven van getallen, beginnen te tellen bij nul, dan voeren we een nieuw symbool, dat *digit* (geheel getal onder de 10, dus wat wij normaal cijfer noemen) wordt genoemd in voor ieder getal tot en met 9. En dan gaan we gebruik maken van het feit, dat wij met groepen van tientallen werken. Om het getal tien te schrijven, schrijven we 10, dat een afkorting is voor „één groep van tien en geen eenheden". Elf, dat gelijk is aan één groep van tien plus één eenheid wordt geschreven 11, enz. De waarde van een digit in een getal hangt van de plaats in dat getal af. Wanneer het in de eerste kolom van rechts staat is de betekenis: aantal eenheden. In de tweede kolom van rechts geeft het de tientallen aan. In de derde kolom het aantal honderdtallen. Zo wil 325 dus zeggen: 3 maal honderd plus 2 maal tien plus 5 eenheden. De basisgroep van dit systeem is een groep van tien. De grotere groepen worden alle gevormd uit groepen van tien. Honderd is tien maal tien. Duizend is tien maal tien maal tien enz. Het getal *tien* is het grondtal van het systeem.

Wanneer we acht vingers zouden hebben

De keuze van het getal *tien* als grondtal voor ons talstelsel is het gevolg van een biologische toevalligheid. Normaal hebben we tien vingers aan onze handen. Wanneer we maar acht vingers zouden hebben, dan zou het vanzelfsprekend zijn, dat we acht als grondtal voor ons talstelsel zouden hebben gekozen. Bij een dergelijk systeem zouden we alleen maar verschillende symbolen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 en 7 nodig hebben voor de getallen tot en met 7. Om het getal acht aan te geven, zouden we dan 10 schrijven, wat dan betekent „één groep van acht en geen eenheden". Het cijfer 11 zou betekenen: één groep van acht plus een, of te wel negen. Het cijfer 12 zou voor tien staan enz. In dit systeem, waarbij acht het grondtal is, betekent 10 *acht,* 100 betekent *acht maal acht* of vierenzestig, 1000 wil zeggen *acht maal acht maal acht,* dus vijfhonderdentwaalf, enz.
Wanneer we eenmaal hebben ingezien, dat ieder ander getal dan tien kan worden gebruikt voor een positioneel systeem, dan staat de weg open om nog veel meer talstelsels te bedenken. Ieder natuurlijk getal groter dan een, kan dienen als grondtal voor een positioneel talstelsel. Het aantal

digits dat voor het systeem nodig is, is gelijk aan het grondtal. In het Arabische systeem, waarbij het grondtal tien is, gebruiken we de digits 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9, die gelden voor de getallen kleiner dan tien. In een systeem met grondtal acht hebben we acht digits, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 en 7, die gelden voor de getallen kleiner dan acht. In een systeem met grondtal vijf hebben we slechts vijf digits nodig, 0, 1, 2, 3 en 4, geldende voor de getallen kleiner dan vijf. Het getal vijf wordt dan voorgesteld door 10. Dit moet worden uitgesproken als „een-nul". Het mag niet als „tien" worden gelezen. Het symbool 10 betekent altijd het grondtal van het talstelsel. Hieruit volgt, dat het alleen maar *tien* betekent als het grondtal tien is. Het betekent *acht* als het grondtal acht is en het betekent *vijf* als het grondtal vijf is. Het zou ook *twee* kunnen betekenen als we twee als grondtal hadden gekozen.

Het binaire stelsel (tweetallig stelsel)

We zullen nu wat verder ingaan op het talstelsel met grondtal twee. Het staat bekend als het *binaire stelsel* (tweetallige stelsel) om getallen op te schrijven. Het is het eenvoudigste van alle talstelsels omdat het als grondtal het kleinste getal hoger dan een toepast. Het vereist slechts twee digits: 0 en 1. Ze worden dikwijls aangeduid als *bits,* een samentrekking van *binaire digits.* We hebben speciale belangstelling voor het binaire stelsel, omdat binaire getallen gemakkelijk met behulp van elektronische apparaten kunnen worden weergegeven. Een lamp bij voorbeeld kan worden gebruikt om een bit weer te geven door b.v. aan te nemen dat het 1 betekent als de lamp brandt en 0 als de lamp uit is. Om deze reden zijn binaire getallen de aangewezen getallen om te worden gebruikt bij het werken met elektronische rekenmachines.
Bij het binaire stelsel betekent een 1 op de tweede plaats van rechts *twee.* Op de derde plaats van rechts betekent zij *twee maal twee* of vier. Op de vierde plaats *twee maal twee maal twee* of acht en zo verder. De getallen een, twee, vier, acht, zestien enz. worden *machten van twee* genoemd. Een binair getal geeft dus in werkelijkheid een getal aan als de som van de machten van twee. Bij voorbeeld: 111 wil zeggen een vier plus een twee plus een een (dus zeven). En 1010 betekent een acht plus geen vieren plus een twee plus geen een. Het wordt dus geschreven voor acht plus twee of te wel tien.

Wiskunde voor luie mensen

Het uitvoeren van berekeningen met behulp van binaire getallen is het ideaal voor luie mensen. Er behoeven slechts een paar dingen te worden onthouden. Voor het optellen: $0 + 0 = 0$; $1 + 0 = 0 + 1 = 1$; $1 + 1 = 10$.
Voor het vermenigvuldigen: $0 \times 0 = 0$; $0 \times 1 = 1 \times 0 = 0$; $1 \times 1 = 1$. Dit alles is in onderstaande tabel samengevat.

Optellen

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Vermenigvuldigen

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Om binair te rekenen worden de normale regels gevolgd, behalve dan dat u deze tabellen gebruikt in plaats van de tafel van 10, die u op school heeft geleerd.

Binaire getallen

Om wat vertrouwder te worden met het binaire talstelsel, zullen we eens veronderstellen dat we de binaire getallen opschrijven van nul tot acht. We kunnen de opteltabel gebruiken om uit te zoeken hoe deze getallen eruit zullen zien. We beginnen met het opschrijven van 0 voor nul. Dan gaan we verder door daar telkens 1 bij op te tellen. Tellen we 1 op bij 0, dan krijgen we $0 + 1 = 1$. Hierbij 1 optellend krijgen we $1 + 1 = 10$. Om 1 bij 10 op te tellen, schrijven we eerst de op te tellen getallen onder elkaar. Daarna tellen we kolom voor kolom op. De volgende optellingen zijn op dezelfde manier opgeschreven. Denk eraan, wanneer u 1 en 1 optelt, dat de som 10 is en u dus de nul opschrijft en de 1 overbrengt naar de volgende kolom links.

10	11	100	101	110	111
1	1	1	1	1	1
11	100	101	110	111	1000

Daaruit volgt, dat de binaire getallen voor de getallen van nul tot 8 als volgt worden geschreven:

nul = 0	drie = 11	zes = 110
een = 1	vier = 100	zeven = 111
twee = 10	vijf = 101	acht = 1000

Om wat ervaring op te doen met het opschrijven van binaire getallen raden wij u aan door te gaan met het optellen van 1-en tot u 32 heeft bereikt.

Er bestaan kortere wegen, die kunnen worden bewandeld om ieder willekeurig getal in het binaire talstelsel op te schrijven. Wij zullen u twee methoden aan de hand doen en deze demonstreren door ze te gebruiken voor het opschrijven van het getal *negenenvijftig* in het binaire stelsel. Methode I. Splits het getal in machten van twee door eerst de hoogste macht van 2 er van af te trekken, die niet groter is dan het getal. Herhaal dit met de rest en ga daarmee door tot de rest is 0 of 1. De hoogste macht van twee die niet groter is dan negenenvijftig, is tweeendertig. Wanneer we beide van elkaar aftrekken, is de rest zevenentwintig. De hoogste macht van twee die niet meer is dan zevenentwintig, is zestien. Aftrekking levert op elf. De hoogste macht van twee die niet meer is dan elf, is acht. Als we aftrekken blijft er drie over. De hoogste macht van twee die niet groter is dan drie is twee. Aftrekken levert een rest op van een. Schrijven we het getal op in Arabische cijfers (grondtal tien) dan kunnen we 59 als volgt schrijven als een som van de machten van twee: $59 = 32 + 16 + 8 + 2 + 1$. Om rekening te houden met de machten van twee, die ontbreken, schrijven we het nog eens op als volgt: voor iedere macht van twee, die voorkomt schrijven we 1 maal die macht. Voor iedere macht, die ontbreekt schrijven we 0 maal die macht. We krijgen dan $59 = 1 \times 32 + 1 \times 16 + 1 \times 8 + 0 \times 4 + 1 \times 2 + 1 \times 1$. De cijfers waarmee de machten van twee worden vermenigvuldigd, zijn de bits, die we moeten gebruiken om 59 in het binaire stelsel op te schrijven. We krijgen dan 59 (grondtal tien) = 111011 (grondtal twee). Methode II. Schrijf het getal op in Arabische cijfers en deel dit door 2. Schrijf het quotiënt eronder en noteer de rest, die 0 of 1 is ernaast.

Nu het quotiënt door 2 delen en noteer het quotiënt en de rest. Ga zo door de verschillende quotiënten door 2 te delen tot het laatste quotiënt 0 of 1 is. De verschillende resten en het laatste quotiënt leveren u in omgekeerde volgorde de bits op van het binaire getal.

Verplaatsen van een bit

In een binair getal hangt de waarde van een bit af van zijn plaats in het getal.
Wat gebeurt er nu met de waarde van een bit als deze een plaats naar links wordt verschoven? Om deze vraag te kunnen beantwoorden, beginnen we met de bit 1 op de eerste plaats rechts. Hier staat hij in de plaats van het cijfer *een*. Verplaats hem nu een plaats naar links en zet op de lege plaats, die dat veroorzaakt de digit 0. Het nieuwe getal dat ontstaat, is 10 of wel *twee*. Verplaatsen we de 1 weer, dan ontstaat er 100 of *vier*. Na de volgende verplaatsing wordt het 1000 of *acht* en zo voort. Het is duidelijk, dat, wanneer een bit een plaats naar links wordt verschoven, het getal, dat hij voorstelt met *twee* wordt vermenigvuldigd (Evenals bij het decimale stelsel door de verplaatsing van een digit een plaats naar links, deze met tien wordt vermenigvuldigd).
Wanneer we nu ieder willekeurig binair getal nemen, dan kunnen we daarin iedere bit een plaats naar links verschuiven. Omdat de plaats geheel rechts leeg blijft als dit wordt gedaan, zetten we daarin een 0. De verschuiving verdubbelt de waarde van iedere bit. Het resultaat is, dat het gehele getal wordt verdubbeld. Nemen we b.v. het binaire getal 101. De waarde daarvan is vier plus een, dus vijf. Wanneer we nu de bits een plaats naar links verschuiven, wordt het 1010, wat betekent acht plus twee, of te wel tien. Later zullen we zien (blz. 119) hoe de elektronische rekenmachines het verplaatsen van bits gebruiken als een gemakkelijke methode om een getal met twee te vermenigvuldigen.
Wanneer het verplaatsen van een bit een plaats naar links de waarde verdubbelt, dan zal een verplaatsing een plaats naar rechts het getal door twee delen. Om in staat te zijn alle bits naar rechts te verplaatsen, zonder uit het oog te verliezen welke bit op de eenheden plaats staat, zetten we een punt direct achter de bit, die de eenheden aangeeft, dus net zoals we een komma plaatsen in getallen met Arabische cijfers (grondtal tien).

2|59
Resten
2|29 1
2|14 1
2|7 0
2|3 1
1 1
De pijl geeft aan in welke volgorde U de bits moet overnemen om het getal van links naar rechts te schrijven.

Omzetten van het binaire stelsel

Dan zullen bits, die rechts van de punt staan binaire breuken aangeven, net als bij de Arabische cijfers achter de komma de decimale breuken komen, zodat bij het binaire stelsel 1. betekent: een; 0.1 betekent: een half, 0.01 is een vierde, enz. Met behulp van deze schrijfwijze kunnen we binaire breuken gebruiken om normale breuken voor te stellen, althans ongeveer, net zoals we normaal decimale breuken voor hetzelfde doel gebruiken.

HOOFDSTUK V

ALGEBRA VAN DE GETALLEN

Grondbewerkingen

Bij de huis-, tuin- en keuken rekenkunde moeten we dikwijls vier verschillende dingen doen met natuurlijke getallen: we tellen ze op, trekken ze af, vermenigvuldigen ze en delen ze. Elk van deze bewerkingen „combineert" twee gegeven getallen op een speciale wijze tot een derde getal, dat dan respectievelijk de *som,* het *verschil,* het *produkt* of *quotiënt* heet. Tellen we twee natuurlijke getallen bij elkaar op, dan is de som daarvan ook een natuurlijk getal. Vermenigvuldigen we twee natuurlijke getallen, dan is het produkt een natuurlijk getal. Om het feit uit te drukken, dat we niet buiten de reeks van natuurlijke getallen behoeven te gaan om de som of het produkt van twee willekeurige natuurlijke getallen te vinden, zeggen we, dat de reeks van natuurlijke getallen voor de bewerkingen optellen en vermenigvuldigen *gesloten* is. Dat kunnen we niet zeggen wanneer het gaat om aftrekken en delen. Terwijl we in de natuurlijke reeks wel 2 van 5 kunnen aftrekken, kunnen we bij dit systeem niet 5 aftrekken van 2. Deze laatste aftrekking is alleen mogelijk met een uitgebreide getallenreeks, die het negatieve getal —3 omvat, een getal, dat buiten de natuurlijke reeks valt. Evenzo kunnen we 6 door 2 delen bij de natuurlijke reeks, maar we kunnen 2 niet door 6 delen. Deze laatste deling wordt alleen mogelijk wanneer we gebruik maken van een uitgebreide reeks, waarin de breuk $^1/_3$ voorkomt, een getal, dat buiten de natuurlijke reeks valt. We zien dus, dat de reeks natuurlijke getallen *niet gesloten* is voor de bewerkingen aftrekken en delen.

Door dit onderscheid voor wat betreft het gesloten zijn, worden de bewerkingen optellen en vermenigvuldigen de grondbewerkingen genoemd met de reeks van de natuurlijke getallen. Zij worden ook nog om een andere reden grondbewerkingen genoemd. De andere bewerkingen kunnen worden uitgedrukt in deze bewerkingen. De opgave „Trek 2 van 5 af" betekent in werkelijkheid: „Zoek het natuurlijke getal, dat bij twee *op-*

geteld als som 5 oplevert". De opdracht „Deel 6 door 2" wil zeggen „Zoek het natuurlijke getal, dat met 2 *vermenigvuldigd* 6 als produkt oplevert". Op deze wijze kunnen alle vraagstukken waarbij aftrekken en delen te pas komt, worden uitgedrukt in de grondbewerkingen optellen en vermenigvuldigen. We geven deze grondbewerkingen aan met de bekende symbolen $+$ en $\times$.

Algemene stellingen

We weten uit de gewone rekenkunde dat $2 + 3 = 3 + 2$. Er zijn heel wat van dergelijke waarheden: $3 + 5 = 5 + 3$, $4 + 9 = 9 + 4$, enz. In feite is het verband, dat in deze beweringen wordt uitgedrukt absoluut algemeen en het kan als volgt onder woorden worden gebracht: Schrijf de som op van twee natuurlijke getallen. Schrijf dan een andere som op door de beide getallen om te wisselen. De beide uitkomsten zijn gelijk. Deze regel kan ook in een andere vorm worden gegoten: Wanneer x ieder willekeurig natuurlijk getal voorstelt en y ook ieder willekeurig natuurlijk getal kan zijn, dan is $x + y = y + x$. Bij deze formulering doen de letters x en y alleen dienst om een plaats te bepalen. Zij duiden de plaatsen aan, die kunnen worden ingenomen door natuurlijke getallen. Letters die op deze wijze worden gebruikt voor het bepalen van plaatsen, worden *variabelen* genoemd. Het gebruik van variabelen maakt het ons mogelijk om in zeer korte vorm algemene eigenschappen op te schrijven, zoals b.v. die, welke we zo juist vaststelden. Bij de verkorte schrijfwijze van de eigenschappen is het gebruikelijk de inleidende zin „Als x ieder willekeurig natuurlijk getal voorstelt en y ook ieder willekeurig natuurlijk getal kan zijn" weg te laten. Hoewel de zin wordt weggelaten, moet hij toch worden beschouwd als een deel van de vaststelling.

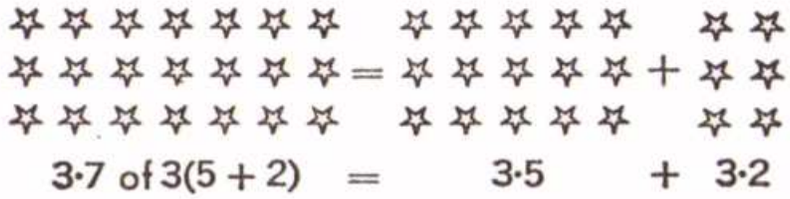
De regels van de rekenkunde

De eigenschap, die wij zo juist hebben beschouwd is belangrijk genoeg om ook een naam te hebben verdiend. We noemen haar *commutatieve eigenschap van de optelling.* Er is ook een overeenkomstige *commutatieve eigenschap van de vermenigvuldiging,* die wij kunnen schrijven in de vorm $xy = yx$.
Hier wordt dan xy gelezen als „x maal y". Wij passen hier de algemene conventie toe om het maalteken tussen variabelen weg te laten om te

voorkomen, dat er verwarring ontstaat tussen het maalteken en de letter x. Hier volgen nog enkele algemene regels betreffende getallen, die worden voorgesteld door variabelen:

$x + (y + z) = (x + y) + z$ *(associatieve eigenschap van de optelling)*
$x(yz) = (xy)z$ *(associatieve eigenschap van de vermenigvuldiging)*
$x(y + z) = xy + xz$ *(distributieve eigenschap van de vermenigvuldiging)*

De associatieve eigenschap van de optelling vertelt ons niet meer dan het bekende feit, dat wanneer we drie getallen optellen, het geen verschil maakt of we eerst het eerste en het tweede getal optellen en dan daarna het derde erbij tellen, of dat we eerst het tweede en het derde getal optellen en dan de som daarvan optellen bij het eerste getal. Dank zij deze regel zijn we er zeker van, dat het optellen van een kolom getallen van boven naar beneden dezelfde uitkomst zal opleveren als een optelling van beneden naar boven.
De distributieve eigenschap drukt alleen maar uit, dat een aantal voorwerpen, dat in een rechthoek is geplaatst, niet verandert wanneer we die rechthoek splitsen in twee rechthoeken, zoals hieronder is aangegeven.



De distributieve eigenschap

Uitzonderingsgetallen

Het cijfer 0 heeft een eigenaardige eigenschap in verband met optellen. Wanneer u 0 optelt bij welk natuurlijk getal ook, dan blijft het getal onveranderd.
Wanneer we een variabele gebruiken, dan krijgt de regel betreffende 0 deze korte vorm: $0 + x = x$. Laten we deze regel de Wet van Nul noemen.
Het cijfer 1 bezit een overeenkomstige eigenschap in verband met vermenigvuldigen. Wanneer we ieder willekeurig natuurlijk getal met 1 vermenigvuldigen, verandert het getal niet: $1x = x$. Laten we dit de Wet van Een noemen.

De algebra van natuurlijke getallen

We hebben zo juist gezien, dat de reeks natuurlijke getallen de volgende eigenschappen heeft:

1. Het is een verzameling bestanddelen, die gesloten is voor twee bewerkingen, waarvan iedere bewerking twee bestanddelen „combineert" om een derde bestanddeel uit het systeem te krijgen.
2. Deze bewerkingen gehoorzamen aan de hierboven genoemde eigenschappen: de commutatieve eigenschappen, de associatieve eigenschappen, de distributieve eigenschap, de Wet van Nul en de Wet van Een.

Ieder systeem, dat gesloten is voor een of meer bewerkingen, die gehoorzamen aan soortgelijke eigenschappen, heeft een zogenaamde algebraïsche opbouw, of korter gezegd: is een *algebra*. De zeven eigenschappen, die we hebben onderzocht zijn tezamen met een paar, die we niet hebben genoemd (omdat we ze in dit boek niet nodig zullen hebben), de grondslag van *de algebra van de natuurlijke getallen.*

Algebra van de gehele getallen

Het *tegengestelde* van een getal is het getal, dat u bij dat getal moet optellen om 0 als uitkomst te krijgen. In de reeks van natuurlijke getallen is een getal dat een tegengesteld getal heeft, een zeldzaam iets. In feite is het getal nul het enige natuurlijke getal, dat een tegengesteld getal heeft. Maar er zijn andere getallenreeksen, waarin getallen, die een tegengesteld getal hebben meer regel dan uitzondering zijn. Een van deze reeksen is de reeks gehele getallen gevormd door 0, de positieve gehele getallen + 1, +2, +3, ... enz. en de negatieve gehele getallen —1, —2, —3, ... enz. Hierbij heeft ieder getal zijn tegengestelde getal. Bij voorbeeld aangezien de som van +3 en —3 gelijk nul is, is —3 het tegengestelde getal van +3 en +3 is het tegengestelde van —3. Een minteken wordt gebruikt als het symbool voor de woorden: „het tegengestelde van", zodat, wanneer x in de plaats staat voor een of ander getal, dan staat $-x$ in de plaats van het tegengestelde getal van dat gehele getal.

De lezer zal zich uit zijn HBS-tijd nog wel herinneren, dat gehele getallen kunnen worden opgeteld en vermenigvuldigd en dat de uitkomst dan steeds een geheel getal zal zijn. Met andere woorden het systeem van de gehele getallen is gesloten voor de bewerkingen optellen en vermenigvuldigen.

Hieruit volgt dat er een *algebra van de gehele getallen* bestaat en de reeds genoemde zeven eigenschappen gelden ook daarvoor. Maar omdat ieder geheel getal ook een tegengesteld getal bezit heeft de algebra van de gehele getallen ook nog een aantal extra eigenschappen, die niet gelden voor de reeks van natuurlijke getallen. Daartoe behoren de vier hieronder volgende eigenschappen, die u zich ook nog wel van uw algebralessen zult herinneren.

$$-(-x) = x \qquad -(x + y) = (-x) + (-y)$$
$$(-x)(-y) = xy \qquad x(-y) = -(xy)$$

Omdat deze eigenschappen ook het gebied van de tegengestelde getallen bestrijken, is de algebra van de gehele getallen anders dan de algebra van de natuurlijke getallen, ook al hebben zij enkele eigenschappen gemeen.

Andere soorten algebra

We hebben dit korte overzicht, van de reeks van de natuurlijke getallen en die van de tegengestelde getallen met twee oogmerken gegeven. Het ene is te laten zien, dat er meer dan een algebra of algebraïsche rekenwijze bestaat. Het zal dan geen verrassing zijn als we een nieuwe soort algebra invoeren in het hoofdstuk over logica. Het tweede oogmerk is om te laten zien wat een algebra eigenlijk is. We zullen er dan op voorbereid zijn deze nieuwe soort algebra ook als zodanig te kunnen herkennen. *)

*) Zie voor een populaire uiteenzetting over verschillende soorten algebra het door dezelfde auteur voor leken geschreven boekje: „The new Mathematics", uitgegeven door The John Day Company te New York 1958.

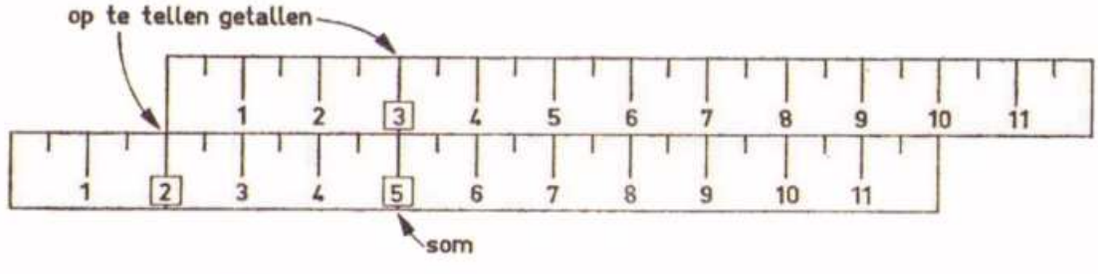
HOOFDSTUK VI

REKENMACHINES

Welk beeld verschijnt er voor uw ogen als u de titel van dit hoofdstuk leest? Het is vrij waarschijnlijk, dat u een elektrische tafeltelmachine voor u ziet met rijen genummerde drukknoppen en dat u het ritmisch geluid hoort, dat deze maakt als de motor hefbomen overhaalt en wieltjes laat draaien. Of ziet u een reeds lang vergeten krantenfoto van een reusachtig elektronisch brein, dat doet denken aan de nachtmerrie van een radioreparateur: een radio-ontvanger, die zo groot is geworden, dat zij een hele kamer vult? Het is echter niet waarschijnlijk, dat u zo iets huiselijks ziet als een paar meetlatjes of de rijen balletjes aan het telraam van een kleuter. Maar toch zijn het juist deze heel gewone dingen waar we eerst over zullen praten, omdat het beide goede voorbeelden zijn van rekenmachines.

Eenvoudige optelmachine

Een paar meetlatjes kunnen worden gebruikt als optelmachine. De getallen 1 tot 20 bij voorbeeld zijn daarop gestempeld. Ieder getal staat bij een streep en stelt het aantal centimeters voor, dat deze streep verwijderd is van de linkerkant van de maatlat. Het getal 0 komt er meestal niet op voor, maar het is duidelijk, dat die nul behoort bij het uiterst linkse streepje of het begin van de maatlat. We kunnen deze maatlatten nu gebruiken

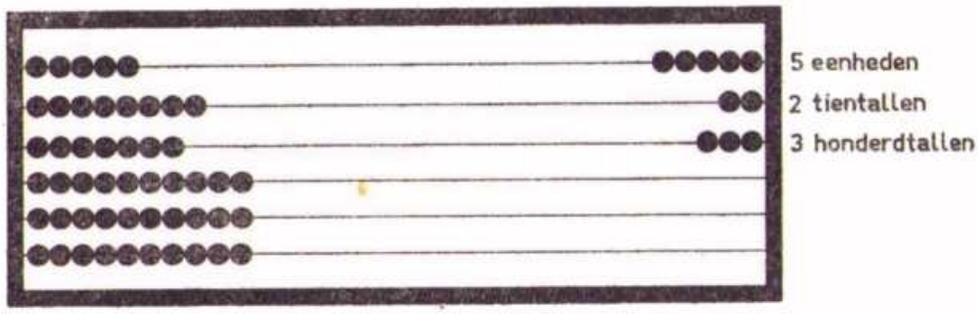


Twee meetlatjes gebruikt als optelmachine

om twee willekeurige getallen die erop voorkomen en waarvan de som niet meer dan twintig is, bij elkaar op te tellen.
Om de getallen op te tellen leggen we de maatlatten langs elkaar zodanig, dat de eerste streep (de 0) van de bovenste maatlat precies ligt boven een van de bij elkaar op te tellen getallen op de onderste lat. Dan zoeken we het tweede getal op, op de bovenste maatlat. De som van deze beide getallen kunnen we dan daaronder op de onderste maatlat aflezen. De tekening laat zien hoe we 2 en 3 bij elkaar optellen.

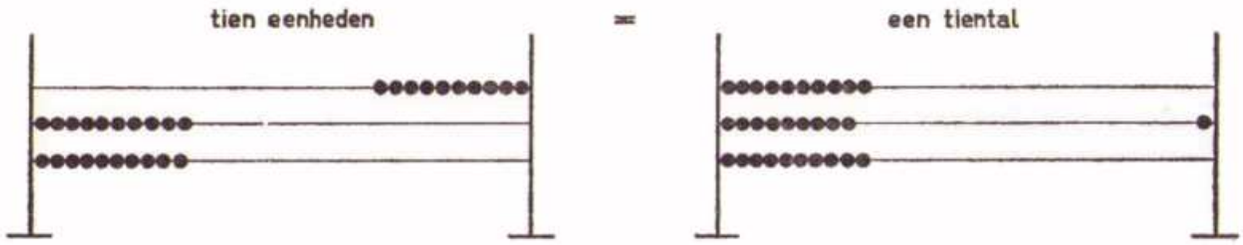
De abacus

De rijen kralen op een telraam zijn overgenomen van de *abacus*, een oud rekenapparaat dat nog steeds op vele plaatsen ter wereld wordt gebruikt.



Het getal 325 op een eenvoudige abacus

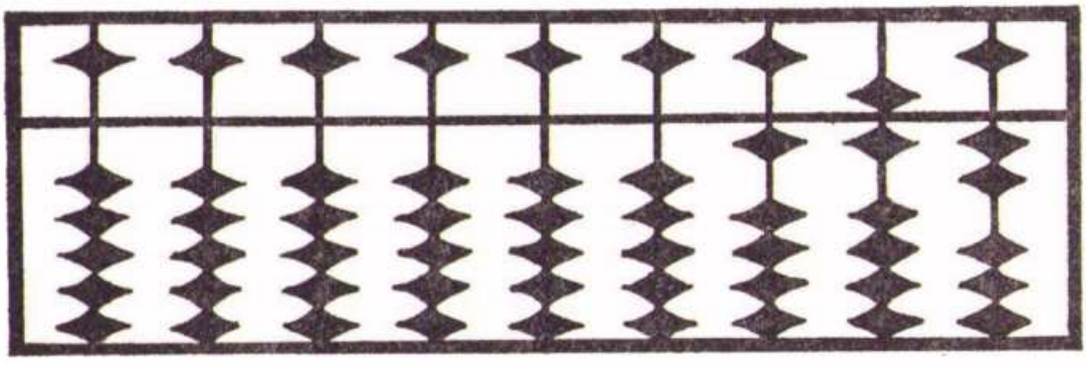
In zijn eenvoudigste vorm bevat iedere rij tien kralen. In de eerste rij betekent iedere kraal een eenheid. In de tweede rij betekent iedere kraal tien. In de derde rij heeft iedere kraal de waarde honderd, enz. Bij de abacus maakt men gebruik van het positionele systeem om getallen vast te leggen met behulp van kralen. Om b.v. het getal 325 te schrijven, schuiven we eerst alle kralen naar links. Dan gaan we kralen naar rechts verschuiven en wel als volgt: 5 kralen van de eerste rij om 5 eenheden aan te geven; 2 kralen van de tweede rij voor de 2 tientallen; 3 kralen van de derde rij om de 3 honderdtallen aan te geven. Om nu 117 bij dit getal op te tellen, verschuiven we nog een kraal van de derde rij naar rechts en ook een van de tweede rij. Verder moeten we nog zeven kralen van de eerste rij naar rechts verschuiven. Dat moeten we in twee stappen doen. We beginnen met er zoveel mogelijk te verschuiven. Als we er vijf hebben



Vervangen van 10 eenheden door één tiental

verplaatst zijn er op deze rij geen kralen meer over. We moeten er dan echter nog twee verplaatsen. Om daarvoor kralen ter beschikking te krijgen verschuiven we alle tien de kralen van de eerste rij weer naar links en verschuiven daarvoor in de plaats een kraal van de tweede rij naar rechts. Dat mogen we doen, want iedere kraal van de tweede rij heeft de waarde tien. Nu verschuiven we nog twee kralen van de bovenste rij naar rechts en de optelling is klaar. Zouden we hetzelfde op papier doen, dan zouden we eerst 5 en 7 optellen, waarvan de uitkomst 12 is. De 2 wordt opgeschreven en de 1 naar de volgende kolom overgebracht. Het vervangen van tien kralen op de eerste rij door een kraal op de tweede rij heeft precies hetzelfde resultaat.

Hoewel de abacus in Nederland een stuk speelgoed is, wordt hij in de Sowjet Unie, China, Japan en verschillende andere landen nog als rekenmachine gebruikt. De Japanse versie van de abacus, die *soroban* heet, is in onderstaande figuur getekend. Een horizontale stang verdeelt hem in twee delen. De kralen onder deze stang stellen van rechts naar links respectievelijk de eenheden, tientallen, honderdtallen enz. voor. De kralen boven deze stang stellen vijf, vijftig, vijfhonderd enz. voor. Getallen worden aangegeven door de betreffende kralen van beide zijden naar de stang toe te schuiven. Geoefende gebruikers van de soroban kunnen er zeer snel mee



Het getal 162 op een Japanse soroban

rekenen. Kort na de tweede wereldoorlog werd er een rekenwedstrijd gehouden tussen een schrijver van het Amerikaanse leger, die een elektrische tafeltelmachine bediende en een bankbediende uit Tokyo, die een soroban gebruikte. De bankbediende won de wedstrijd!

Twee typen rekenmachines

Er zijn twee hoofdtypen rekenmachines, die tegenwoordig worden gebruikt. Zij verschillen in de wijze waarop zij de getallen, waarmee zij berekeningen uitvoeren, voorstellen. Het ene type is gebaseerd op een van de wijzen, waarop wij getallen gebruiken. Het andere type gaat uit van de wijze waarop wij getallen opschrijven.
Een belangrijke toepassing van getallen komt naar voren bij het meten van natuurkundige grootheden. *Lengte* is een voorbeeld van een dergelijke natuurkundige grootheid. We meten een lengte door deze te vergelijken met een eenheid van lengte. Het resultaat van de meting wordt dan uitgedrukt in een aantal eenheden. Bij het meten gebruiken we een getal om een natuurkundige grootheid aan te geven. Dit proces kan ook worden omgekeerd. *We kunnen een natuurkundige grootheid gebruiken om een getal voor te stellen.* Dan kunnen we om wiskundige bewerkingen met getallen uit te voeren ook overeenkomstige bewerkingen uitvoeren met de natuurkundige grootheden. Dat deden we toen we twee maatlatten gebruikten als optelmachine. We stelden elk van de getallen voor door een lengte en toen telden we de getallen bij elkaar op door de lengten op te tellen. Rekenmachines die getallen voorstellen door natuurkundige grootheden, noemt men *analoge rekenmachines.*
De optelmachine, gemaakt van maatlatjes, is de eenvoudigste analogerekenmachine. Bij andere analoge rekenmachines kunnen getallen worden voorgesteld door natuurkundige grootheden, door het aantal omwentelingen van een draaiend wiel of de sterkte van een elektrische stroom.
Wanneer we getallen in Arabische cijfers schrijven, wordt ieder getal voorgesteld door een reeks digits. Er zijn slechts tien digits bij dit systeem, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9. Deze tien symbolen hebben geen andere eigenschappen voor het werk dat zij doen, dan dat zij er allemaal verschillend uitzien. Elke tien symbolen die van elkaar kunnen worden onderscheiden kunnen hun plaats innemen. Deze symbolen kunnen inkttekens op een stuk papier zijn, of rijen kralen aan een koord, of ieder voorwerp,

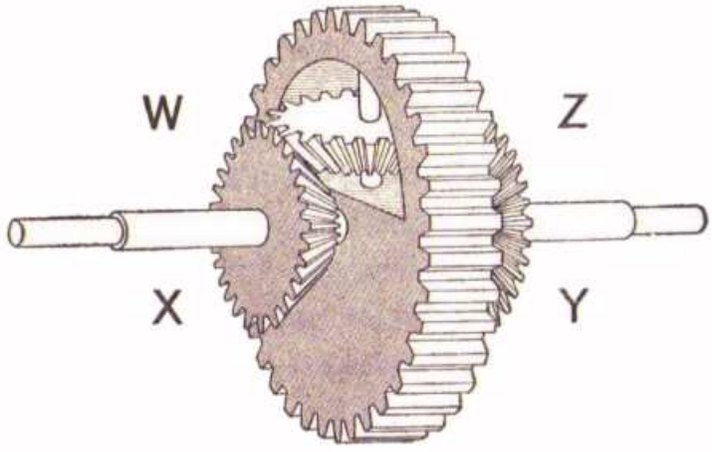
dat in staat is tien verschillende standen aan te nemen of dat in tien verschillende uitvoeringen bestaat. Dit opent de mogelijkheid om voorwerpen te gebruiken om digits voor te stellen. Reeksen van deze voorwerpen kunnen dan worden gebruikt om getallen voor te stellen door ze in de juiste volgorde van hun digits te plaatsen. Dit is het principe, dat ten grondslag ligt aan de abacus. Iedere rij kralen van de abacus kan in tien standen voorkomen en wel met geen enkele verplaatste kraal, of met een verschoven kraal, of met twee kralen die verschoven zijn enz. Iedere stand vertegenwoordigt een digit en de reeksen van rijen kralen, die elk een bepaalde stand vertonen, stellen een getal voor. Iedere rekenmachine, waarbij dit principe wordt toegepast heet een *digitale rekenmachine*. De abacus is de eenvoudigste van de digitale rekenmachines. Daar we de kralen van de abacus met de hand verplaatsen, behoort hij tot de laagste trap van ontwikkeling van de digitale rekenmachines: de handgereedschappen. Een rekenmachine met elektrisch bedieningspaneel behoort tot de hoger ontwikkelde trap van de krachtwerktuigen. De moderne elektronische machine vertegenwoordigt de hoogste trap van ontwikkeling: het automatische gereedschap.

De differentieel-analysator

Een van de bekendste analoge rekenmachines is de *differentieel-analysator,* gebouwd door het Massachusetts Institute of Technology. Bij deze machine wordt een getal voorgesteld door het aantal omwentelingen van een rad. Berekeningen worden uitgevoerd door de omwentelingen van verschillende raderen te combineren. Er zitten twee belangrijke rekeneenheden in de differentieel analysator. Een daarvan is een *differentieel overbrenging,* zoals er ook een zit in de achteras van een auto. Bij de auto heeft het differentieel ten doel de beide achterwielen met verschillende snelheid te laten draaien wanneer de auto een bocht maakt. Bij de differentieel analysator is het doel het *gemiddelde* van twee getallen uit te rekenen. De andere rekeneenheid is een *integrator,* die mechanisch een van de grondbewerkingen van de hogere wiskunde uitvoert. De analysator maakt berekeningen door een reeks stappen waarin hij gemiddelden uitrekent en integraties uitvoert, net zoals de machine van Turing berekeningen maakt door een reeks stappen, waarin zij 1-en en *X*-en schrijft.
Als voorbeeld van een analoge berekening zullen we beschrijven hoe het

differentieel het gemiddelde opzoekt van twee getallen. Onderstaande tekening laat zien hoe een differentieel in elkaar zit. Het is een samenstel van vier tandwielen, X, Y, Z en W. De tandwielen X en Y hebben een gelijk aantal tanden en zijn bevestigd op bussen welke om de as van tandwiel Z zitten. Tandwiel W is gemonteerd op een as in een uitsparing in tandwiel Z. Wanneer het tandwiel Z draait, neemt het tandwiel W met zich mee in de rondte. De tandwielen X en Y grijpen in tandwiel W op de wijze, zoals in de figuur is aangegeven. Stel, dat we het gemiddelde willen weten van twee getallen x en y. Om x voor te stellen draaien we het tandwiel X met een snelheid van x omwentelingen per seconde. Om y voor te stellen draaien we het tandwiel Y met een snelheid van y omwentelingen in dezelfde richting als tandwiel X. Dan zal de snelheid van tandwiel Z gelijk zijn aan $\frac{x + y}{2}$ omwentelingen per seconde. Laten we eens kijken waarom dat zo is.

Veronderstel om te beginnen dat x en y dezelfde getallen zijn. De tandwielen X en Y draaien dan met dezelfde snelheid. In dit geval gedraagt tandwiel W zich als een starre verbinding tussen de tandwielen X en Y.



Differentieel

Wanneer de tandwielen X en Y draaien, oefenen zij krachten uit op tandwiel W, waardoor tandwiel Z gaat meedraaien met dezelfde snelheid. Zijn echter x en y ongelijke getallen, dan draaien de tandwielen X en Y met verschillende snelheid, waardoor er niet alleen krachten op tandwiel W worden uitgeoefend, maar het ook om zijn as gaat draaien. Laat ons eens aannemen, dat tandwiel X sneller draait dan tandwiel Y en laten we z de

snelheid noemen, waarmee tandwiel Z draait. Stel u verder voor dat er een waarnemer op het tandwiel Z zit en daarmee meedraait. Kijkt hij naar tandwiel X, dan ziet hij dat niet op volle snelheid draaien, want zijn eigen draaisnelheid (snelheid van tandwiel Z) moet daarvan worden afgetrokken. Hij ziet dus alleen het verschil in snelheid tussen het tandwiel X en het tandwiel Z. Dit verschil is $x - z$. Evenzo zal hij als hij naar tandwiel Y kijkt alleen het verschil in snelheid constateren tussen tandwiel Y en tandwiel Z. Dit verschil is $z - y$. Zo beschouwd ziet hij het tandwiel X sneller draaien en wel met een snelheid $x - z$. Ten gevolge hiervan gaat tandwiel W draaien. Dan schijnt tandwiel W kracht uit te oefenen op tandwiel Y, waardoor het gaat draaien tegengesteld aan de draairichting van tandwiel X. Voor iedere tand van W dat door X wordt rondgedraaid, zal een tand aan de tegenoverliggende zijde van W kracht uitoefenen op Y. De waarnemer zal dan zien dat de tandwielen X en Y met dezelfde snelheid rondraaien. Dat wil zeggen, dat $x - z = z - y$.
Wanneer we uit deze eenvoudige vergelijking z oplossen vinden we:

$$z = \frac{x + y}{2}$$

Wanneer het differentieel eenmaal het gemiddelde van twee getallen heeft bepaald, dan is het zeer eenvoudig om ook hun som te krijgen. Grijpen de tanden van een ander tandwiel met half zoveel tanden als het tandwiel Z in de tanden van tandwiel Z, dan zal het twee maal zo snel draaien als Z. Is dus de snelheid van het tandwiel Z gelijk aan $\frac{x + y}{2}$, dan zal de snelheid van dit kleinere tandwiel $x + y$ zijn. Dit is echter alleen het geval als de tandwielen X en Y in dezelfde richting draaien. Draaien we ze in tegengestelde richting, dan zal de snelheid van tandwiel Z gelijk zijn aan

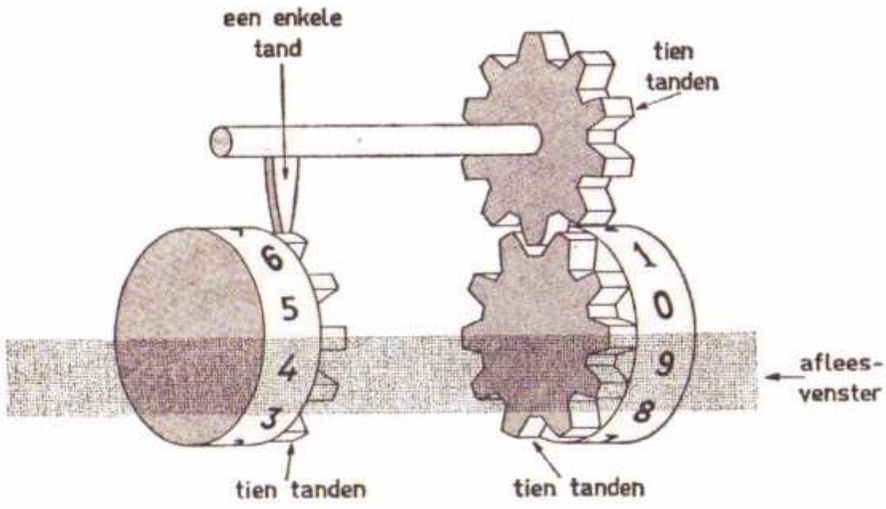
$$z = \frac{x - y}{2}$$

en de snelheid van het kleinere tandwiel, dat door Z wordt aangedreven is dan $x - y$. Op deze wijze kan een differentieel dus, met behulp van slechts een extra tandwiel, zowel optellen als aftrekken.

Een telmachine

Bij een digitale rekenmachine wordt een getal voorgesteld door een reeks digits. Wanneer de getallen met Arabische cijfers zijn geschreven moet het

voorwerp, dat een enkele digit voorstelt in staat zijn tien verschillende standen aan te nemen, zodat iedere stand overeenkomt met een van de digits van 0 tot 9. Een voorwerp dat daarvoor dikwijls wordt gebruikt, is een rad, waarvan de omtrek is verdeeld in tien gelijke delen. De cijfers 0 tot 9 worden in de juiste volgorde in deze vakjes gedrukt. Ten gevolge van de cirkelvorm komt de 0 weer na de 9. Een venstertje boven het rad heeft een zodanig formaat, dat we slechts een cijfer tegelijk kunnen zien. De tien standen van het rad zijn de tien standen waarin het rad kan worden gedraaid om tien verschillende cijfers door het venstertje te kunnen zien. Verschillende van dergelijke raderen naast elkaar gemonteerd onder een lang venster kunnen worden gebruikt om getallen met meerdere cijfers voor te stellen. Wanneer de raderen met tandwielen worden gecombineerd, dan kan de combinatie worden veranderd in een *telmachine*.
Een van de manieren om dat te doen, is aangegeven in de tekening.



Een telmachine

Wanneer het rechtse rad van stand 9 op 0 overgaat, drukt de hefboom aan de as van het tandwiel het links daarvan aangebrachte rad een cijfer verder ($^1/_{10}$ omwenteling). Dat rad verandert dus van stand en in het venster zal het zichtbare cijfer één hoger worden. Het stel raderen is dus nu voorzien van een mechanisme om te *transporteren*. Bij een met de hand bediende telmachine wordt een hefboom neergedrukt om een eenheid te registreren. Iedere keer dat de hefboom wordt neergedrukt zal het rad met de eenheden, dat geheel rechts is aangebracht, een tiende omwenteling maken. Wanneer de beginstand zodanig is, dat de 0 door het venster zichtbaar is, gaat het telkens een stap verder naar 1, 2, 3, enz. tot de 9 is

bereikt. Wanneer nu de hefboom weer wordt neergedrukt en het eenheden-rad weer op 0 komt, zal het rad met de tientallen een stap verder draaien. Op deze wijze worden de eenheden van het eenheden-rad vervangen door een tiental op het rad met tientallen.
Telapparaten van dit type worden dikwijls op machines aangebracht, die een zekere bewerking steeds weer herhalen. Het apparaat telt dan het aantal malen, dat de bewerking werd uitgevoerd. De *kilometerteller* in een auto is een telmachine, die wordt gebruikt om het aantal kilometers te tellen dat de auto aflegt. Het eerste rad in de teller registreert tiende delen van kilometers. Het is door middel van een flexibele kabel verbonden met een van de wielen van de auto. Wanneer het wiel zoveel maal in het rond draaide dat de auto een tiende kilometer heeft gereden, draait de kabel het eerste rad van de teller juist zoveel, dat het cijfer onder het venster vervangen wordt door het daaropvolgende.

Een tafeltelmachine

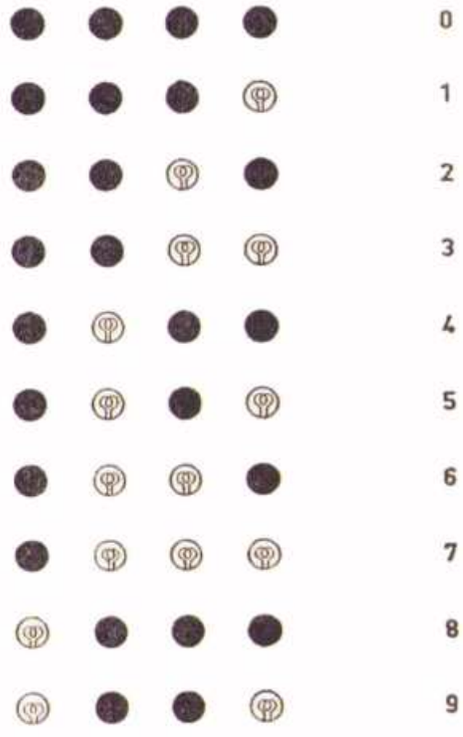
Om een telmachine te veranderen in een met de hand te bedienen optelmachine is alleen maar een extra mechanisme nodig om de verschillende raderen over iedere willekeurige afstand te kunnen laten draaien. Bij een van de typen optelmachines bestaat dit mechanisme uit een aantal stangen met nokken, een voor elk rad van de telmachine. Een reeks drukknoppen genummerd van 0 tot en met 9 is door middel van hefbomen met elke stang verbonden. Wordt een van de drukknoppen neergedrukt, dan duwt de hefboom de stang zover omhoog, dat het aantal tanden van de stang dat boven het rad uitsteekt, gelijk is aan het cijfer, dat bij de betreffende knop staat. Wordt dan een hefboom met de hand bewogen, dan wordt de stang teruggetrokken. Op deze wijze wordt het getal op de drukknop opgeteld bij dat, waarop het rad stond ingesteld. Tegelijkertijd zal het rad na een volle omwenteling het volgende rad een stap verder doordraaien (een 1 wordt naar de volgende kolom *getransporteerd),* zodat de som in de vorm van een met Arabische cijfers geschreven getal onder het venster zal verschijnen.
Wanneer een optelling is volbracht dan brengt het neerdrukken van een hefboom alle radertjes weer in de 0-stand, zodat de machine gereed is om een nieuwe reeks getallen op te tellen.
Een machine die optelt, is gemakkelijk geschikt te maken voor aftrekken,

vermenigvuldigen en delen. Omdat zij optelt bij het getal dat voor het afleesvenster staat, door de radertjes in één richting te draaien, kan zij ook aftrekken door de radertjes in tegengestelde richting te draaien. Zij kan twee getallen vermenigvuldigen wanneer zij is ingericht voor het registreren van twee getallen tegelijkertijd. Dan zal zij, wanneer zij het vermenigvuldiggetal steeds met zichzelf vermeerdert, op het andere register de vermenigvuldiger bij iedere optelling met 1 verminderen, tot er 1 overblijft. Wanneer dan de 1 is bereikt, heeft zij het vermenigvuldigtal zo dikwijls bij zichzelf opgeteld als de vermenigvuldiger aangeeft. Dat is hetzelfde als vermenigvuldigen met de vermenigvuldiger. Wanneer de machine was ingesteld om b.v. 5 met 4 te vermenigvuldigen, dan zouden de paren getallen tijdens de bewerking als volgt worden geregistreerd: 4, 5; 3, 10; 2, 15; 1, 20. Als de vermenigvuldiger afgenomen is tot 1, geeft het getal op de plaats van het vermenigvuldigtal het produkt aan. De machine kan delen als ze in staat is een zeker getal telkens opnieuw af te trekken en het aantal aftrekkingen kan tellen terwijl ze dat doet. Bij voorbeeld: om 35 door 11 te delen, zal de machine beginnen met 35 en dan daarvan telkens 11 aftrekken net zo lang tot de rest minder is dan 11. Als ze de respectievelijke resten aangeeft en ook het aantal aftrekkingen, zal dit laatste getal het quotiënt zijn. Bij deling van 35 door 11 zullen de volgende getallen worden geregistreerd: 24, 1; 13, 2; 2, 3. Het aantal aftrekkingen is 3, zodat ook het quotiënt 3 is.
Om de snelheid waarmee de bewerkingen verlopen, te vergroten moet de zojuist beschreven machine nog iets worden veranderd. De hefboom, die moet worden bewogen om iedere stap bij het optellen of aftrekken te doen, wordt door een elektromotor vervangen. Wanneer dat is gedaan, dan hebben we de grondelementen voor een elektrische tafeltelmachine. Er zijn veel van dergelijke machines in de handel. Zij verschillen van elkaar alleen in technische details, maar ze werken alle volgens hetzelfde principe.

Verstelling zonder zichtbare beweging

Een grotere snelheid van de berekeningen wordt verkregen, wanneer bewegende delen, zoals hefbomen en radertjes, worden vervangen door onderdelen uit een elektronische schakeling. Dan wordt de zichtbare, maar langzame beweging van mechanische onderdelen vervangen door de onzichtbare, doch snelle beweging van een elektrische stroom. De eerste stap bij het ontwerpen van een digitale rekenmachine opgebouwd uit elektrische eenheden, zal zijn een apparaat te construeren, dat cijfers kan weergeven,

zodat het het werk kan overnemen van het roterende rad. Wanneer getallen worden geschreven in Arabische cijfers, moet het apparaat zodanig zijn, dat het tien verschillende toestanden kan aangeven. Een voorbeeld van een dergelijk apparaat is een omschakelaar, die de elektrische stroom in elke willekeurige van tien verschillende leidingen kan leiden. In verband met hun aard vereisen echter elektronische eenheden een geheel andere benadering van het probleem hoe de cijfers van een getal voor te stellen.
Schakelaars, relais en buizen zijn typische elektrische onderdelen. Zij hebben een eenvoudige en in het oog springende eigenschap gemeen. Ze kunnen namelijk alle *in- of uit*geschakeld zijn. Met andere woorden: ze kunnen alle in *twee* toestanden voorkomen. Dit feit brengt ons op het idee zonder meer twee toestanden te gebruiken voor het weergeven van digits in plaats van ons te gaan inspannen om een toestel te ontwerpen dat tien verschillende toestanden heeft. We hebben een dergelijk tien-standen apparaat alleen maar nodig als we de getallen in Arabische cijfers noteren. We kunnen echter volstaan met een apparaat dat slechts twee toestanden kent als we in plaats daarvan de getallen opschrijven volgens het binaire talstelsel. Het binaire talstelsel is de natuurlijke weg om getallen aan te geven door de toestand waarin elektrische onderdelen zich bevinden. Dat is de reden waarom het voor elektronische rekenmachines wordt toegepast. Onderstaande tekening laat zien, hoe een groep van vier gloeilampen kan worden gebruikt om de getallen van nul tot en met negen aan te geven. Iedere lamp stelt een bit voor in het binaire cijfer in een getal.



Getallen voorgesteld door lampen

Het gebruik van binaire getallen vereenvoudigt het probleem van het ontwerpen van een elektronische rekenmachine. Maar het maakt het probleem hoe het te gebruiken, ingewikkelder. Het dwingt ons getallen uit het decimale stelsel om te zetten in het binaire stelsel, voor wij ze aan de machine toevoeren, en dan weer de resultaten van de berekeningen van de machine te vertalen in het decimale stelsel. Om deze extra stappen van het omzetten van het ene stelsel in het andere te omzeilen zijn sommige machines ontworpen op basis van een compromis tussen beide stelsels. Bij deze compromis-machines worden getallen voorgesteld door decimale cijfers, maar ieder cijfer wordt geschreven als vier bits in het binaire talstelsel, dus zoals in de figuur op blz. 41. Een getal bestaande uit twee cijfers wordt uitgedrukt in twee stellen van vier bits elk. Een getal met drie cijfers drukt men uit in drie stellen van vier bits elk enz. Als b.v. het woord UIT wordt gebruikt om de 0 voor te stellen en het woord AAN de 1 voorstelt, zal het decimale getal 237 als volgt door twaalf bits worden voorgesteld: UIT-UIT-AAN-UIT UIT-UIT-AAN-AAN UIT-AAN-AAN-AAN
Dit is juist, want

UIT-UIT-AAN-UIT stelt het binaire getal 0010 voor, wat *twee* betekent;
UIT-UIT-AAN-AAN stelt het binaire getal 0011 voor, wat *drie* betekent en
UIT-AAN-AAN-AAN stelt het binaire getal 0111 voor, wat *zeven* betekent.

In Hoofdstuk XI, waarin we enkele details van een typische elektronische rekenmachine zullen beschrijven, zullen we verklaren op welke wijze getallen voorgesteld in deze tussenvorm elektrisch kunnen worden opgeteld of vermenigvuldigd.

HOOFDSTUK VII

WOORDEN, ZINNEN EN LOGICA

Gewoon en fantastisch denken

Om een machine te kunnen ontwerpen, die denkt, moeten we de regels van het denken kennen. De studie van de regels van het denken wordt *logica* genoemd. In dit hoofstuk zullen we kennis maken met enkele van de voornaamste begrippen, die bij de studie van de logica te pas komen. Daarna zullen we in de daarop volgende hoofdstukken deze begrippen gaan toepassen om de regels van het denken te onderzoeken.
Wanneer u het woord *„denken"* leest, dan is het niet onmogelijk, dat u zich plotseling het beeld van Rodin *„de denker"* voor de geest haalt, de man, die met zijn elleboog op zijn knie zit en zijn kin op zijn hand laat rusten, terwijl hij tracht de mysteries van het heelal te doorgronden. Of misschien denkt u aan een rechter, die tracht zich een weg te banen door een ingewikkeld juridisch betoog, of aan een wiskundige, terwijl hij bezig is het bewijs van een stelling te formuleren. In deze eeuw van de specialisatie spreken we over sommige mensen als „denkers", alsof denken een speciale roeping is van slechts een beperkt aantal mensen. Maar niemand heeft het monopolie op denken. De loodgieter denkt alvorens hij besluit hoe de pijpen te leggen voor een verwarmingssysteem. De huisvrouw denkt als ze een menu samenstelt. Een kind denkt wanneer het besluit op een stoel te klimmen om iets van de tafel te pakken. Het denken van de filosoof, de rechter en de wiskundige is intensiever en ingewikkelder dan het gewone denken in het dagelijks leven, maar het is opgebouwd uit dezelfde logische elementen. Alle denken, of het nu gewoon of fantastisch is volgt dezelfde regels.

Gedachten en spraak

Wij drukken onze gedachten uit in woorden. Daarom loopt de structuur van de gedachte parallel aan de structuur van de spraak. We kunnen een

idee krijgen van waar het om gaat bij het denken als we de taal, die we gebruiken nader onderzoeken. Feitelijk is het voldoende de taal te bestuderen van een kind, dat spreken leert. Iedere toeneming van zijn woordenschat zal ons voeren tot een beter begrip van de logica.

Zelfstandige naamwoorden en groepen

Laat ons zonder meer de legende overnemen, dat het eerste woord, dat een baby zegt *Mama* is. Hij leert dan al spoedig zijn eigen naam (b.v. *Peter)* en herkent *Papa* en andere gezinsleden. Hij leert ook woorden als *lepel, kop, tafel* en dergelijke. Hij heeft al lang in de gaten, dat de woorden *Mama* en *tafel* op verschillende manieren worden gebruikt. Het woord *Mama* behoort volgens zijn ervaring maar bij één verschijning, de warme, lieve vrouw, die hem eten geeft, hem baadt, aankleedt en liefkoost. Maar het woord *tafel* behoort bij verschillende dingen. Hij kan het gebruiken voor de tafel in de keuken, de tafel in de eetkamer of zijn eigen kleine tafeltje op zijn slaapkamertje. Het woord *tafel* is de naam voor een hele *groep* dingen en wordt gebruikt voor elk lid van die groep. Zo zijn ook *lepel* en *kop* groepsnamen, terwijl *Peter* en *Papa* maar op één individu betrekking hebben. In de grammatica maken we onderscheid tussen de groepsnamen en de namen van individuen door er verschillende naamkaartjes aan te hangen. We noemen een groepsnaam een *soortnaam.* We noemen de naam van een individu een *eigennaam.* Om bij het schrijven het verschil te laten uitkomen, schrijven we eigennamen met een hoofdletter.

De grondslag voor ons gebruik van soortnamen is dan ook het begrip groep. Een groep is iedere verzameling voorwerpen, die enkele eigenschappen gemeen hebben. De verschillende leden van een groep worden *elementen* genoemd. Ieder afzonderlijk voorwerp kan een element zijn van verschillende groepen. Een tafel uit een eetkamer b.v. kan behoren tot de groep van de *houten voorwerpen.* Zij behoort ook tot de groep van de tafels en tot de groep van de meubelen. Enkele groepen overlappen elkaar of hebben gemeenschappelijke elementen. De groep van de tafels en de groep van de meubelen hebben enkele gemeenschappelijke elementen. In feite valt de groep van de tafels geheel onder die van de meubelen. De groep van de meubelen en de groep van de houten voorwerpen hebben eveneens gemeenschappelijke elementen, maar geen van beiden valt geheel

binnen de andere groep. Niet alle houten voorwerpen zijn meubelstukken en niet alle meubelen zijn van hout vervaardigd. Enkele groepen overlappen elkaar zelfs helemaal niet. Zo hebben b.v. de groep van de mineralen en de groep van de dieren helemaal geen gemeenschappelijke elementen. Geen enkel mineraal is geklassificeerd als dier en omgekeerd.

Zinnen en proposities

In een verder gevorderde groei van de kindertaal begint het kind in hele zinnen te spreken. Veel van die zinnen zijn beweringen of vaststellingen. Het kan zeggen: „De melk is warm" of „Peter is moe". Het kan b.v. de bal van een vriendje afpakken en zeggen: „Die bal is van mij". Een ouder kind kan in een speelse bui woorden aan elkaar rijgen zonder enige zin, om een zin te produceren als „De tafel hemel springt over het paarse lied". We zien direct, dat we onderscheid moeten maken tussen twee soorten zinnen. Sommige zinnen, zoals de drie eerste, hebben een duidelijke betekenis. Andere zinnen, zoals de laatste, hebben *geen enkele* betekenis. Het kind maakt soms zinnen zonder enige betekenis, alleen om zichzelf en anderen te vermaken. Lewis Carroll beoogde hetzelfde toen hij schreef:

" 'Twas brillig, and the slithy toves
Did gyre and gimble in the wabe:
All mimsy were the borogroves,
And the mome raths outgrabe." *)

Helaas schrijven sommige mensen zinnen zonder betekenis, terwijl zij denken dat zij iets aan de lezer mededelen. Terwijl we, als we dat willen, aan een betekenisloze zin mogen denken als aan een soort muziek, is het niet de methode om gedachten uit te drukken. Bij de studie van de logica moeten we alleen zinnen beschouwen, die betekenis hebben.
Een bewering die een betekenis heeft, wordt een *propositie* genoemd. Iedere propositie is óf juist óf onjuist. De juistheid of onjuistheid van een propositie wordt *waarheidswaarde* genoemd.

Op een propositie gebaseerde vormen

De bewering: „De laatste toon rechts op het toetsenbord van een piano is hoger dan de kamertoon", is een propositie. Wanneer we de eerste tien

*) Dit gedicht, waarvan slechts enkele woorden werkelijk bestaan, is onvertaalbaar. Het is te beschouwen als een spelen met klanken. (Noot v.d. vertaler).

woorden (het volledige onderwerp van de zin) vervangen door een open ruimte, krijgen we een *op een propositie gebaseerde vorm:* „. . . . . is hoger dan de kamertoon". De op een propositie gebaseerde vorm is geen propositie. Het is zelfs geen zin. Het wordt echter een zin als we in de open ruimte een of ander onderwerp plaatsen. Hier volgen b.v. drie zinnen, die verkregen zijn door in de open ruimte verschillende onderwerpen in te vullen:

1. De tweede noot van rechts op het toetsenbord van een piano is hoger dan de kamertoon.
2. De laatste noot links op het toetsenbord van een piano is hoger dan de kamertoon.
3. Mijn hoed is hoger dan de kamertoon.

U ziet, dat hoewel het alle drie zinnen zijn, ze niet allemaal proposities zijn. Zowel zin 1 als 2 hebben een betekenis. De eerste is waar, de tweede is onwaar. Maar zin 3 heeft geen betekenis. Daarom is het geen propositie. Wanneer we een propositie willen maken van een op een propositie gebaseerde vorm, dan zijn we niet vrij in de open ruimte ieder willekeurig onderwerp in te vullen. We mogen alleen onderwerpen kiezen, die een zin opleveren, welke een betekenis heeft (of het nu waar is of niet). Een stel onderwerpen, dat een waarheid oplevert wanneer het in een op propositie gebaseerde vorm wordt ingevuld, heet het *„universe of discourse"*. In dit geval kunnen we b.v. als het „universe of discourse" alle noten op het toetsenbord van de piano kiezen.

Een open ruimte is bij het schrijven gemakkelijk aan te geven, maar kan praktisch bij het spreken niet tot uitdrukking worden gebracht. Om in staat te zijn een op een propositie gebaseerde vorm even gemakkelijk uit te spreken als op te schrijven, richten we ons naar de elementaire algebra en gebruiken een variabele als plaatsvervanger. Gebruiken we X als variabele, dan kan de op een propositie gebaseerde vorm worden geschreven: X is hoger dan de kamertoon. Wordt X vervangen door een willekeurig element binnen de „universe of discourse", dan wordt een zin met een betekenis of wel een propositie verkregen. Voor sommige van deze elementen is de propositie juist. Alle elementen, waarvoor de propositie waar is vormen een eigen groep in het „universe of discourse".

De op een propositie gebaseerde vorm „X is hoger dan de kamertoon" wordt de *bepalende vorm* van die groep genoemd. Iedere groep kan worden gedefinieerd met behulp van de bepalende vorm. De gang van zaken bij het definiëren van een groep is eerst een „universe of discourse"

te specificeren, waarbinnen de groep moet worden gezocht. Dan stellen we een bepalende vorm op, die een ware propositie is voor de elementen van het „universe of discourse", die in de groep voorkomen en een onware propositie oplevert voor elementen van het „universe of discourse", die niet binnen die groep vallen. De bepalende vorm werkt als een soort filter, dat leden van de groep afscheidt uit het „universe of discourse".
Om bij voorbeeld een vierkant te definiëren, kunnen we als het „universe of discourse" alle rechthoeken kiezen en dan voor de bepalende vorm gebruiken: „*X* heeft gelijke zijden".
Wanneer eenmaal een „universe of discourse" is gespecificeerd, dan kan iedere groep, die daar onder valt, worden gedefinieerd door een passende bepalende vorm. Het proces is dus duidelijk omkeerbaar. Iedere bepalende vorm die een betekenis heeft binnen die „universe of discourse", definieert een daaronder vallende groep. Dit feit toont aan, dat er een nauwe relatie bestaat tussen het begrip *groep* en het begrip *propositie*. Het zal dan geen verwondering wekken te ontdekken, dat er een nauw verband bestaat tussen de algebra van de groepen, die in hoofdstuk VIII wordt behandeld en de algebra van de proposities, die wordt behandeld in hoofdstuk IX.

Relaties

Sommige woorden, die een kind zeer vroeg leert, drukken een *relatie* uit tussen twee dingen. Als het zegt: „De kop staat op de tafel"; geeft het woord *op* een relatie aan tussen de kop en de tafel. Wanneer het zegt: „Meneer Groen is Jan's papa", gebruikt het het woord papa (let op de kleine p) om de relatie „vader van" aan te geven. In zijn eerste kennismaking met getallen leert het de relatie „kleiner dan", die bestaat tussen twee getallen.
Een van de problemen van de logica is: de eigenschappen van relaties te ontdekken en de relaties dan volgens hun eigenschappen te classificeren. Laat ons b.v. de relatie *kleiner dan* eens nader bekijken. Het is gebruikelijk deze aan te geven door het symbool $<$. Zo kan dus de propositie „Twee is kleiner dan drie" worden geschreven: $2 < 3$. Het is een bekend feit van de *kleiner dan*-relatie, dat zij de volgende eigenschappen heeft: als het eerste van drie getallen kleiner is dan het tweede en het tweede kleiner dan het derde, dan is het eerste kleiner dan het derde. Deze eigenschap staat bekend als de *transitieve* eigenschap, omdat de *kleiner dan* - relatie

door het middelste getal heen grijpt om het eerste met het laatste te verbinden. *(transiet* betekent: gaan door).
Niet alle relaties bezitten de transitieve eigenschap. De relatie *vader van* bijvoorbeeld heeft de transitieve eigenschap niet. Wanneer Jan de vader is van Frederik en Frederik de vader van Henk, dan is het niet zo, dat Jan de vader is van Henk.

Relaties tussen groepen en proposities

Er zijn zekere speciale relaties die groepen binnen een „universe of discourse" tot elkaar kunnen hebben. We hebben er al enkele genoemd. Zo kunnen b.v. twee groepen enkele elementen gemeen hebben. Doen zij dat, dan zeggen wij dat ze elkaar *doorkruisen.* Een bijzonder belangrijk geval van doorkruising ontstaat wanneer een groep geheel binnen de andere valt. Laten we voor het gemak de variabelen A, B en C gebruiken om de groepen aan te duiden binnen een zeker „universe of discourse". Wanneer A geheel onder B valt, dan zeggen we dat A een sub-groep is van B. Om de relatie „is een sub-groep van" aan te geven gebruiken we het symbool $\subset$ (Lees $\subset$ als „is een sub-groep van" of „is begrepen in"). De bewering „A is een subgroep van B" kan dan worden geschreven in de vorm van $A \subset B$. Het is gemakkelijk in te zien, dat als A een sub-groep van B is en B een sub-groep van C ook A een sub-groep van C is. Hieruit volgt dat de relatie $\subset$ evenals de relatie $<$ de transitieve eigenschap heeft. In feite is het symbool voor „is een sub-groep van" met opzet zodanig gemaakt, dat het overeenkomst vertoont met het symbool „kleiner dan" en wel om er ons aan te helpen herinneren, dat de beide relaties overeenkomstige eigenschappen hebben.
Er zijn zekere speciale relaties, die opgaan voor sommige proposities. Een buitengewoon belangrijke is de relatie van de *gevolgtrekking.* De propositie „Het regent" sluit de propositie „De straat is nat" in (Dat wil zeggen als de eerste propositie juist is, moet de tweede dat ook zijn). „De straat is nat" houdt ook in „Iedereen, die op straat loopt krijgt natte schoenen". We verkrijgen deze derde propositie door de volgende welbekende regel van de logica te gebruiken: Wanneer een propositie een tweede propositie insluit en de tweede propositie sluit een derde propositie in, dan sluit de eerste propositie ook de derde in. Met andere woorden, de relatie „sluit in" heeft de transitieve eigenschap. Om dit in verkorte vorm aan te geven zullen

we het symbool $\rightarrow$ gebruiken voor de relatie „sluit in" en we zullen de letters p, q en r gebruiken als variabelen, die in de plaats kunnen worden gezet voor proposities. We zien dan dat de relatie $\rightarrow$ transitief is op de volgende wijze: Als $p \rightarrow q$ en $q \rightarrow r$, dan is $p \rightarrow r$.
In de volgende twee hoofdstukken zullen we meer relaties tussen de groepen onderzoeken en ook relaties tussen proposities. We hebben reeds gezien, dat de relatie $\subset$, die enkele groepen verbindt en de relatie $\rightarrow$, die enkele proposities verbindt, lijken op de relatie $<$, die enkele getallen verbindt. We zullen meer van dergelijke overeenkomsten vinden tussen het gedrag van groepen of proposities en het gedrag van getallen. In werkelijkheid zullen er voldoende overeenkomsten zijn om het mogelijk te maken een algebra van de groepen en een algebra van de proposities op te stellen.

HOOFDSTUK VIII

ALGEBRA VAN DE GROEPEN

Groepen in een universum

Kies een willekeurige groep voorwerpen als een „universe of discourse". We zullen deze groep de universele groep noemen of korter nog het *universum*. Door elementen binnen dit universum op verschillende manieren te kiezen kunnen we groepen vormen binnen dit universum. Zij zullen alle subgroepen zijn van de universele groep. Het doel van dit hoofdstuk is het verband te onderzoeken tussen alle mogelijke subgroepen van de universele groep.

We kunnen bij voorbeeld als universele groep alle levende mensen kiezen. We kunnen een groot aantal subgroepen binnen dit universum onderscheiden met behulp van bepalende vormen. Hier zijn enkele voorbeelden:

1. X is een inwoner van de Verenigde Staten.
2. X is een burger van de Verenigde Staten.
3. X is een inwoner van New York City.
4. X is de schrijver van dit boek.
5. X is de president van de Verenigde Staten.
6. X is een levend persoon.
7. X is dood.

De groep die wordt gespecificeerd door iedere bepalende vorm, is de groep van al die levende personen, waarvoor de bepalende vorm een ware bewering is, wanneer X wordt vervangen door een lid van deze groep. Wij wijzen erop, dat de groepen 1, 2 en 3 enkele, maar niet alle leden van de universele groep omvatten. De groep, genummerd 6 daarentegen omvat alle leden van de universele groep. Dat wil zeggen de universele groep is ook een van zijn eigen subgroepen. De groepen 4 en 5 bevatten elk precies één lid van de groep. Een groep, die slechts één, maar dan ook één lid omvat heet een *eenheidsgroep*. De groep genummerd 7 bevat helemaal geen leden. We noemen dat een *lege groep*. We zullen dikwijls moeten verwijzen naar de universele groep en de lege groep en

daarom zullen we er speciale symbolen voor vaststellen. We zullen het symbool 1 gebruiken voor de universele groep en het symbool 0 voor de lege groep. De reden van deze keuze zal spoedig blijken.

Een klein universum

De verhoudingen binnen een universele groep zijn vooral gemakkelijk te zien, wanneer de universele groep slechts een paar leden bevat. Laat ons bij voorbeeld eens voor de universele groep een stel van drie symbolen kiezen, #, % en $. We vormen nu alle mogelijke subgroepen van deze universele groep. Om een groep te onderscheiden zullen we de verschillende daartoe behorende leden tussen accoladen plaatsen, { }. Om gemakkelijk naar deze groepen te kunnen verwijzen, zullen we ze elk een naam geven. De universele groep en de lege groep hebben al namen: 1 en 0. Om de andere groepen aan te duiden zullen we hoofdletters gebruiken zoals *A*, *B* en *C* uit het begin van het alfabet. Voor de variabelen, die voor iedere groep kunnen gelden, zullen we de hoofdletters *X*, *Y* en *Z* gebruiken uit het einde van het alfabet. Hier is een complete lijst van alle subgroepen binnen dit kleine universum, tezamen met hun namen:

Het universum = 1 = {#, %, $}
$A = \{\#, \%\}$
$B = \{\#, \$\}$
$C = \{\%, \$\}$
$D = \{\#\}$
$E = \{\%\}$
$F = \{\$\}$
De lege groep = 0 = { }

Om een subgroep te vormen van elk van de groepen uit deze lijst laten we alle, of enkele, of geen van de leden weg. Wanneer we b.v. met groep *B* beginnen en geen elementen weglaten, dan blijft over {#, $} of *B*. Laten we $ weg, dan houden we over {#} of *D*. Laten we # weg, dan krijgen we {$} of *F*. Laten we zowel # als $ weg, dan krijgen we { } of 0. De subgroepen van *B* zijn dus *B*, *D*, *F* en 0. Gebruiken we nu het symbool $\subset$ voor de relatie „is een subgroep van", dan kunnen we zeggen $B \subset B$, $D \subset B$, $F \subset B$ en $0 \subset B$. De subgroepen van *C* zijn *C*, *E*, *F*, en 0, zodat $C \subset C$, $E \subset C$, $F \subset C$ en $0 \subset C$.

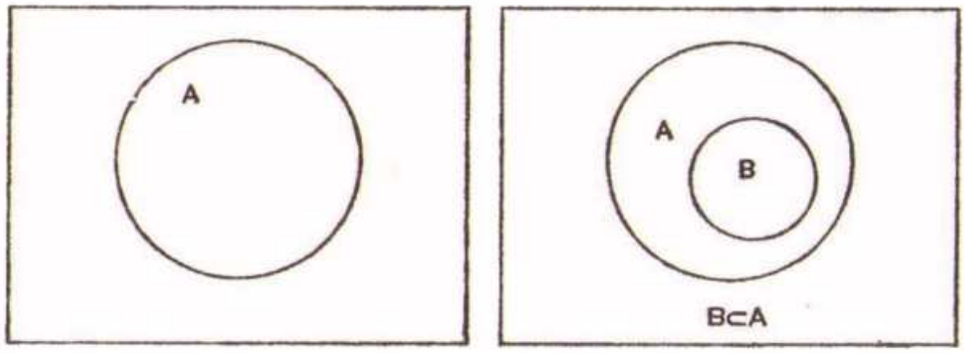
De subgroep-relatie

Door dit kleine universum als model te gebruiken, kunnen we een aantal eenvoudige regels die het symbool $\subset$ betreffen, controleren. Het is niet moeilijk in te zien, dat deze regels waar zijn voor welk universum ook:
De lege groep is een subgroep van iedere groep in het universum. In symbolen opgeschreven krijgt deze regel de vorm $0 \subset X$, waarbij X een variabele is, die voor iedere subgroep van de universele groep in de plaats kan worden gezet. Aangezien de enige groepen, waarover we spreken, subgroepen zijn van de universele groep, kunnen we zeggen, dat iedere groep een subgroep is van het universum. In symbolen $X \subset 1$.
Iedere groep is een subgroep van zichzelf. In symbolen $X \subset X$. We hebben reeds gezien dat de relatie $\subset$ de transitieve eigenschap heeft. In symbolen: Als $X \subset Y$ en $Y \subset Z$, dan is $X \subset Z$.
We zullen twee groepen gelijk noemen als ze dezelfde leden hebben. Van tijd tot tijd zullen we twee groepen moeten vergelijken om te zien of ze gelijk zijn. Een eenvoudige proef op de gelijkheid van groepen volgt uit de volgende regel: Twee groepen zijn gelijk, wanneer elk van hen een subgroep is van de andere. In symbolen: Als $X \subset Y$ en $Y \subset X$, dan is $X \subset Y$.
Er zijn minstens twee groepen in het universum, die niet gelijk zijn. Zo is b.v. de universele groep niet gelijk aan de lege groep, omdat de lege groep geen enkel lid bevat, terwijl de universele groep wel leden bevat. (Deze regel gaat alleen niet op voor het uitzonderingsgeval, dat de universele groep de lege groep is. Maar in dat geval, met een lege „universe of discourse" hebben we niets om over te praten. Laten we dus dit uitzonderingsgeval maar buiten beschouwing laten). In symbolen uitgedrukt krijgt de regel deze vorm: er is een groep X en een groep Y zodanig, dat $X \neq Y$ (lees $\neq$ als „*niet* gelijk aan").

Diagrammen van Venn

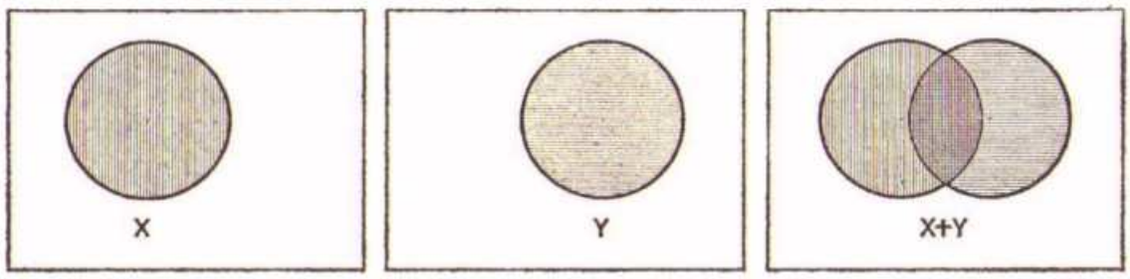
Het zal voor de rest van dit hoofdstuk een goed hulpmiddel blijken te zijn, wanneer we diagrammen tekenen om het verband tussen de groepen aan te geven. De speciale diagrammen die wij gebruiken heten diagrammen van Venn, naar John Venn, een Engelse wiskundige uit de negentiende eeuw. In de diagrammen van Venn wordt het universum voorgesteld door punten binnen een rechthoek. Een subgroep van het universum wordt voorgesteld door de punten in een zeker gebied binnen de rechthoek.

Meestal wordt er een cirkel gebruikt om een gebied binnen de rechthoek aan te geven. Het eerste diagram dat hieronder is afgedrukt, stelt de subgroep A binnen het universum voor. Het tweede diagram laat een andere subgroep B zien, die geheel binnen A valt. Dit illustreert het verband $B \subset A$.



Nieuwe groepen van oude

Nu gaan we enkele bewerkingen introduceren waarmee het mogelijk is twee groepen te combineren tot een derde groep in hetzelfde universum. Om de bedoeling van elke bewerking duidelijk te maken zullen we een Venn-diagram tekenen, dat dit kan illustreren. We zullen de bewerkingen met drie elementen #, % en $ ook in ons model universum toepassen. De eerste bewerking, die wij zullen beschrijven is de *optelling* van groepen en deze zal worden voorgesteld door een plusteken. Wanneer X en Y groepen zijn in het universum 1, dan is $X + Y$ de groep, die gevormd wordt door alle elementen in het universum, die liggen in X of in Y (In de logica wordt aangenomen dat deze groep elementen omvat, die in beide groepen voorkomen). Wij wijzen erop, dat het belangrijkste begrip hier wordt aangeduid door het woordje *of*. In het diagram van Venn, dat hieronder staat afgedrukt, zal, wanneer X wordt voorgesteld door een cirkel met vertikale arcering en Y door een cirkel met horizontale arcering, $X + Y$ worden voorgesteld door het dubbel gearceerde gedeelte binnen de dikke zwarte lijn.



Optellen van groepen

In universum $1 = \{\#, \%, \$\}$ zie blz. 51)

$B = \{\#, \$\}$ en $C = \{\%, \$\}$, dus

$B + C = \{\#, \%, \$\}$, waaruit volgt $B + C = 1$

$D = \{\#\}$ en $E = \{\%\}$, dus $D + E = \{\#, \%\} = A$

$E = \{\%\}$ en $F = \{\$\}$, dus $E + F = \{\%, \$\} = C$

Wanneer X en Y groepen zijn van hetzelfde universum, wordt $X + Y$ hun *som* genoemd. Ook wordt het wel eens hun *vereniging* genoemd, omdat zij is verkregen door alle elementen, die in de twee groepen voorkomen te verenigen. Het systeem van de subgroepen van een universum is gesloten voor de bewerking $+$, omdat als X en Y subgroepen zijn van het universum, $X + Y$ ook een subgroep is.

Regels voor het optellen

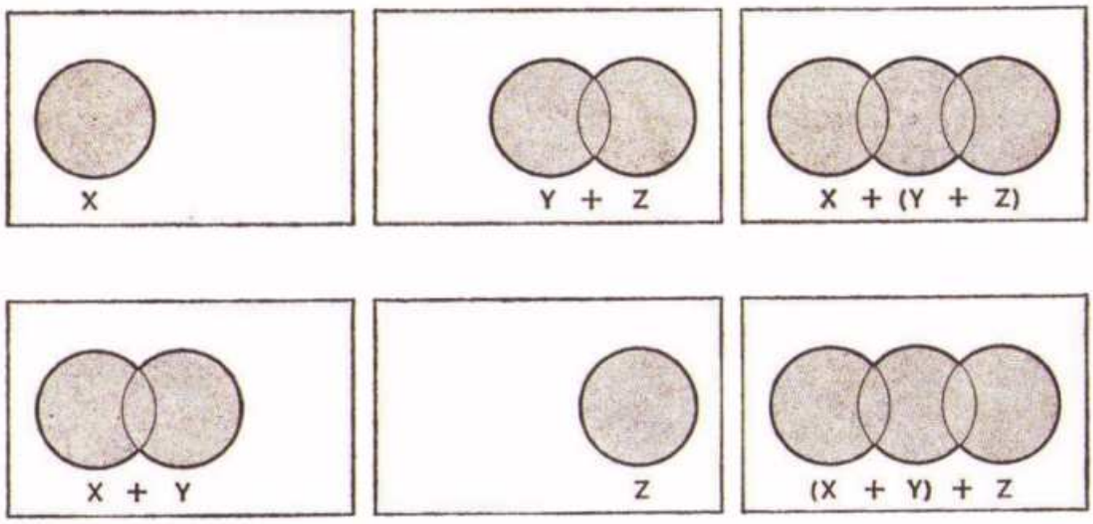
Enkele eenvoudige regels, die te maken hebben met de optelling van groepen volgen direct uit de definitie:

Het verenigen van de elementen van X en Y levert hetzelfde resultaat op als het verenigen van de elementen van Y en X. In symbolen uitgedrukt: $X + Y = Y + X$ (Commutatieve eigenschap van de optelling). Bijvoorbeeld: als $B = \{\#, \$\}$ en $C = \{\%, \$\}$, dan bevat $B+C$ alle elementen van B en ook het element $\%$, dat in C voorkomt, maar niet in B. $C+B$ bevat alle elementen van C en ook het element $\#$ dat in B voorkomt, maar niet in C. In beide gevallen bevat de som precies dezelfde elementen $\#$, $\%$ en $\$$. Dus is $B + C = C + B$.

Wanneer X, Y en Z groepen zijn, zal het samenvoegen van X met de som van Y en Z hetzelfde resultaat opleveren als het samenvoegen van de som van X en Y met Z. In symbolen: $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$ (Associatieve eigenschap van de optelling). Deze regel wordt geïllustreerd door de diagrammen van Venn, weergegeven op pag. 55.

Wanneer een groep met zichzelf wordt verenigd, is het resultaat weer geheel en al dezelfde groep, omdat zij alle elementen van de oorspronkelijke groep bevat en geen nieuwe elementen. Symbolisch geschreven: $X + X = X$.

Een groep verandert niet wanneer u deze verenigt met de lege groep, aangezien de lege groep er geen nieuwe elementen aan toe voegt. In symbolen: $X + 0 = X$ (Wet van 0).

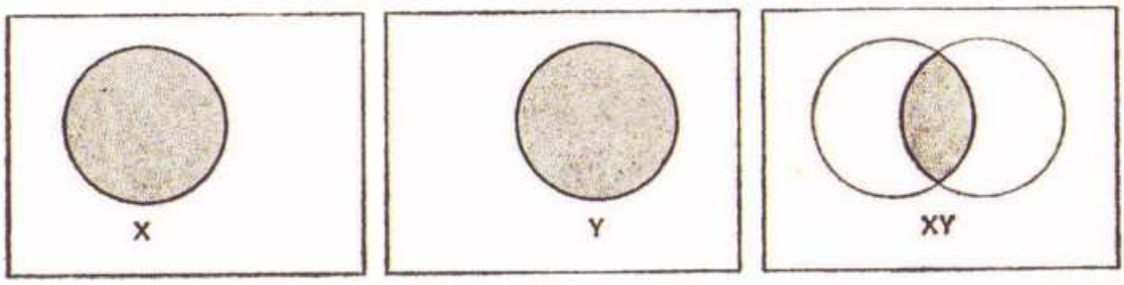


Associatieve eigenschap van de optelling

Wanneer een groep wordt verenigd met het universum, is het resultaat het universum. Dat is volkomen juist, want de vereniging van een groep met het universum moet alle elementen bevatten welke in het universum voorkomen en kan geen andere elementen bevatten: Symbolisch geschreven: $X + 1 = 1$.
Een groep komt geheel voor in iedere vereniging van deze groep met een andere groep. In symbolen: $X \subset X + Y$.
Wij wijzen erop, dat enkele regels, de optelling van groepen betreffende, dezelfde zijn als de regels welke gelden voor het optellen van getallen: de commutatieve eigenschap, de associatieve eigenschap en de wet van 0. Enkele regels voor de optelling van groepen, zoals $X + X = X$ en $X + 1 = 1$ hebben echter geen equivalent voor het optellen van getallen.

Vermenigvuldiging van groepen

De tweede bewerking, die we zullen behandelen is het *vermenigvuldigen* van groepen. Evenals in de gewone algebra zullen we vermenigvuldigen voorstellen door een punt, maar die punt zal dikwijls worden weggelaten. Wanneer X en Y groepen zijn in het universum 1, dan is XY de groep, die is opgebouwd uit alle elementen die in X *en* Y voorkomen. Het belangrijkste wordt hier uitgedrukt door het woordje *en*. De uitkomst van een vermenigvuldiging van twee groepen heet hun *produkt* of hun *kruising*. Het diagram van Venn voor een produkt is hierna getekend.

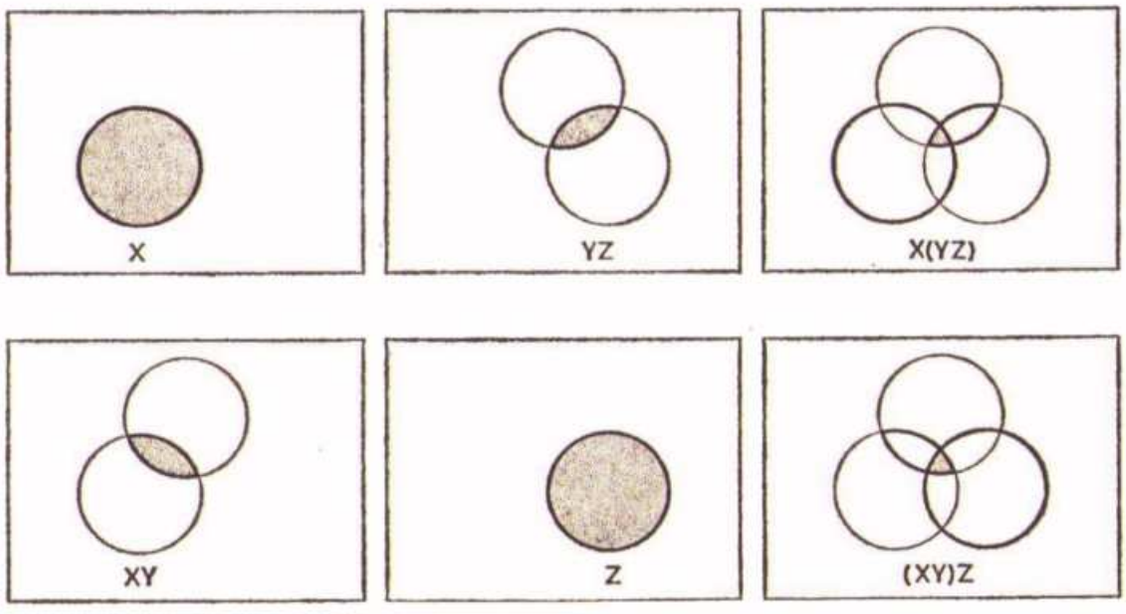


Vermenigvuldigen van groepen

In het universum $1 = \{\#, \%, \$\}$, is $BC = \{\$\} = F$. Er zijn geen elementen, die zowel bij D als bij E behoren, zodat $DE = 0$. Het systeem van de subgroepen van een universum is gesloten voor vermenigvuldiging, want als X en Y subgroepen van het universum zijn, dan is XY dat ook.

Regels voor de vermenigvuldiging

De regels die betrekking hebben op het vermenigvuldigen van groepen zijn gemakkelijk te bewijzen.
De groep elementen in zowel X als Y is hetzelfde als de groep elementen in zowel Y als X. In symbolen: $XY = YX$ (Commutatieve eigenschap van de vermenigvuldiging).
Wanneer X, Y en Z groepen zijn levert X vermenigvuldigd met het produkt van Y en Z hetzelfde resultaat op als het vermenigvuldigen van het produkt van X en Y met Z. Symbolisch geschreven: $X\ (YZ) = (XY)Z$ (Associatieve eigenschap van de vermenigvuldiging). Deze regel wordt geïllustreerd door onderstaande diagrammen van Venn.

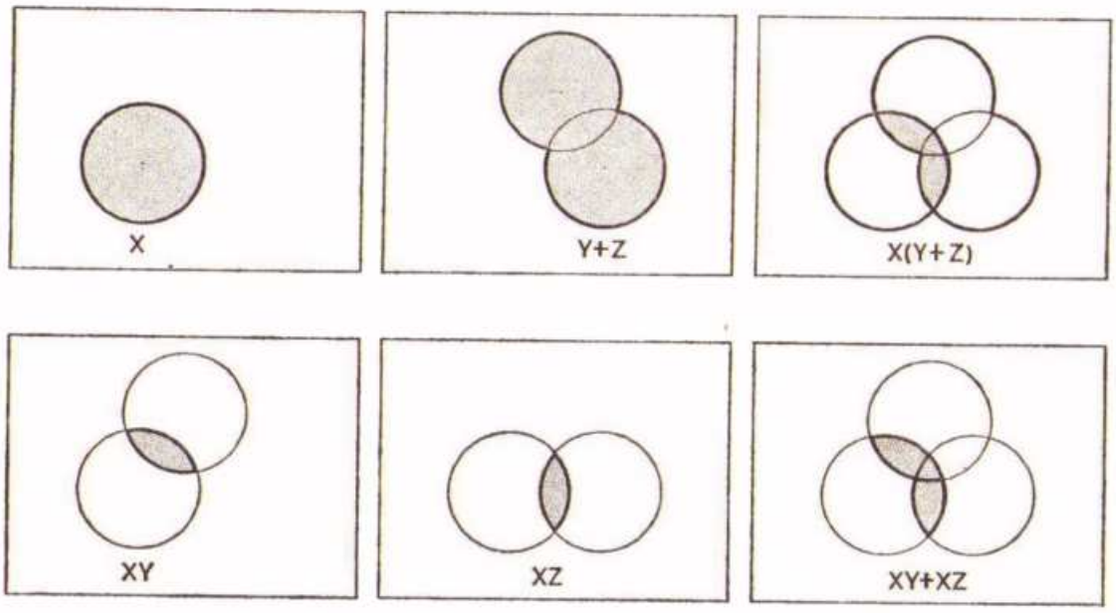


Associatieve eigenschap van de vermenigvuldiging

Wanneer X een groep is, dan zijn er geen elementen, die voorkomen in zowel de lege groep als in X. Hieruit volgt, dat het vermenigvuldigen van een groep met de lege groep als produkt de lege groep oplevert. Symbolisch geschreven: $0X = 0$.
Wanneer X een groep is, dan zijn de elementen, die tot het universum en tot X behoren, precies de elementen van X. Vermenigvuldiging van het universum met een groep levert dezelfde groep als produkt op. In symbolen: $1X = X$ (Wet van 1).
Wordt een groep met zichzelf vermenigvuldigd, dan is het produkt dezelfde groep, omdat de elementen in zowel X als X blijkbaar alleen maar de elementen van X zijn. Symbolisch geschreven: $XX = X$.
Wanneer twee groepen X en Y worden vermenigvuldigd is het produkt een subgroep van beide groepen. Dit blijkt direct uit het diagram van Venn. Symbolisch geschreven: $XY \subset X$ en $XY \subset Y$.
Onder deze regels, betrekking hebbend op de vermenigvuldiging van groepen, zijn er enkele, die overeenkomen met die voor de vermenigvuldiging van getallen: de commutatieve eigenschap, de associatieve eigenschap en de wet van 1. Er zijn echter ook enkele regels, zoals $XX = X$, die in het geheel niet gelden voor getallen.

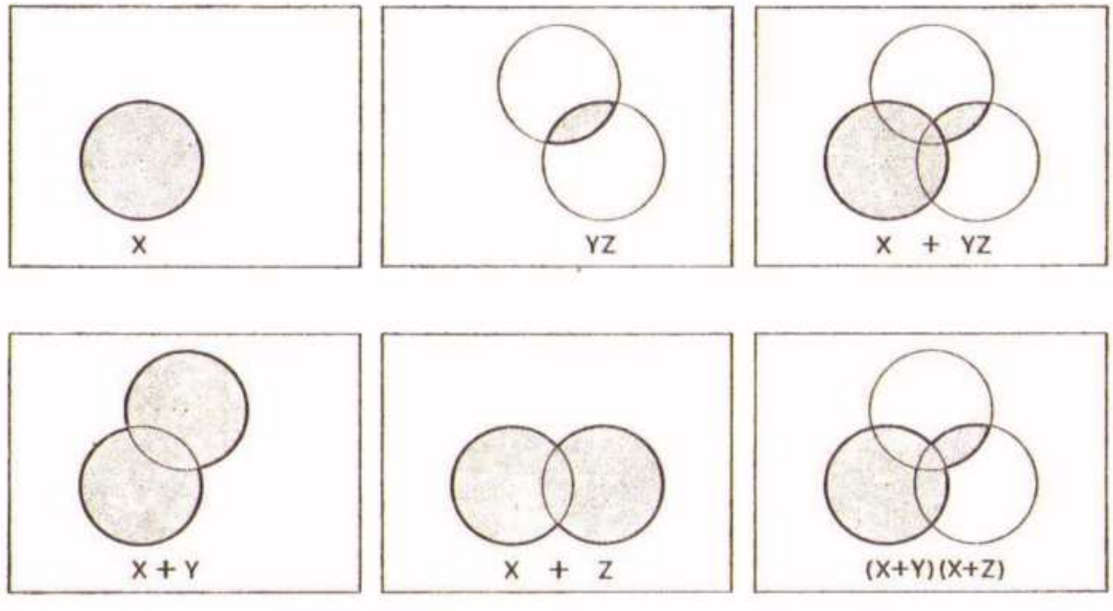
De distributieve eigenschappen

Bij de algebra van de getallen hadden we de distributieve eigenschap $X(Y + Z) = XY + XZ$. We kunnen aan de hand van diagrammen van Venn nagaan, dat deze eigenschap ook geldt voor groepen. De uitdrukking $XY + XZ$ wil zeggen: vermenigvuldig eerst X met Y en vermenigvuldig dan X met Z. Verenig daarna de beide produkten. Deze twee bewerkingen worden in de diagrammen van Venn, weergegeven boven op pag. 58, voorgesteld.
Wanneer we de beide resultaten vergelijken zien we, dat zij hetzelfde zijn. De eigenschap, dat $X(Y+Z) = XY + XZ$ kan als volgt onder woorden worden gebracht. Om de som van twee groepen met een derde groep te vermenigvuldigen kunnen we ook elk van de twee groepen afzonderlijk met de derde groep vermenigvuldigen en dan de produkten optellen. Het is interessant na te gaan wat er met deze eigenschap gebeurt wanneer we de woorden optellen en vermenigvuldigen met elkaar verwisselen en ook de woorden som en produkt onderling verwisselen. We krijgen dan na een



Vermenigvuldigen is distributief met betrekking tot optellen

kleine omzetting van woorden om er een bruikbare zin van te maken het volgende: om een derde groep op te tellen bij het produkt van twee groepen, kunnen we haar met hetzelfde resultaat eerst bij elk van de twee groepen optellen en daarna de sommen met elkaar vermenigvuldigen. Symbolisch uitgedrukt wordt dat dus: $X + (YZ) = (X + Y)(X + Z)$. De oorspronkelijke eigenschap zegt dat vermenigvuldigen distributief is met betrekking tot optelling. De nieuwe bewering zegt dat optellen distributief is met betrekking tot vermenigvuldigen. De oorspronkelijke eigenschap gaat op voor zowel natuurlijke getallen als groepen. Is de nieuwe bewering nu ook een eigenschap van natuurlijke getallen en groepen?

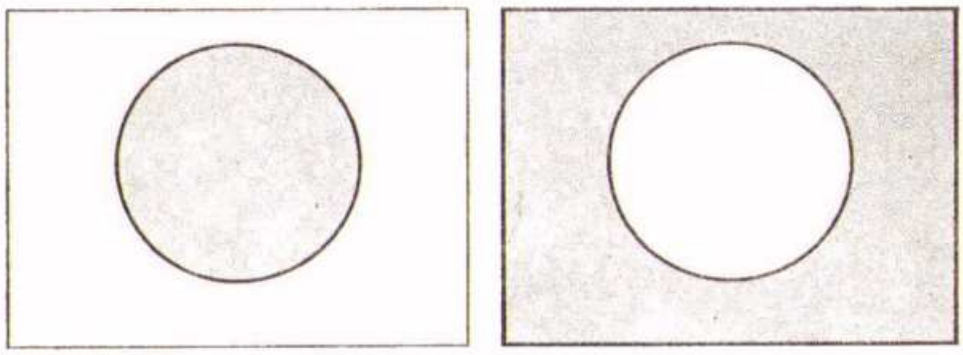


Optellen is distributief met betrekking tot vermenigvuldigen

Om na te gaan of de nieuwe bewering opgaat voor getallen stellen we $X = 2$, $Y = 3$ en Z is 4. De bewering zegt dat $2 + (3 \cdot 4) = (2 + 3)(2 + 4)$ of $2 + 12 = 5 \cdot 6$. Dit is, zoals we zien, niet waar, dus de nieuwe bewering is *geen* eigenschap van natuurlijke getallen. Het is echter *wel* een eigenschap voor groepen, zoals we zien in bovenstaande diagrammen van Venn. Voor groepen hebben we dus twee distributieve eigenschappen: vermenigvuldigen is distributief met betrekking tot optellen en optellen is distributief met betrekking tot vermenigvuldigen.

Het complement

We voegen hieraan nog een derde bewerking met groepen toe, nl. *bepalen van het complement*. Wanneer X een groep is in het universum, dan is het complement van X de groep, die ontstaat wanneer we uit het universum alle elementen van X verwijderen. Om aan te geven dat het complement is bepaald wordt een streep boven de naam van de groep geplaatst. Het complement van X wordt aangegeven met $\overline{X}$. De bewerking wordt geïllustreerd door onderstaand diagram van Venn.



Als voorbeeld van het bepalen van het complement willen we het complement zoeken van B in het universum $1 = \{\#, \%, \$\}$
$B = \{\#, \$\}$, dus $B = \{\%\} = E$. Als tweede voorbeeld nemen we aan, dat het universum de groep is van alle levende mensen en X de groep van alle in de Verenigde Staten levende mensen. Dan is $\overline{X}$ de groep levende mensen, die *niet* in de Verenigde Staten wonen. De streep, die betekent dat het complement is bepaald, betekent hetzelfde als het woordje *niet* in de normale spraak.

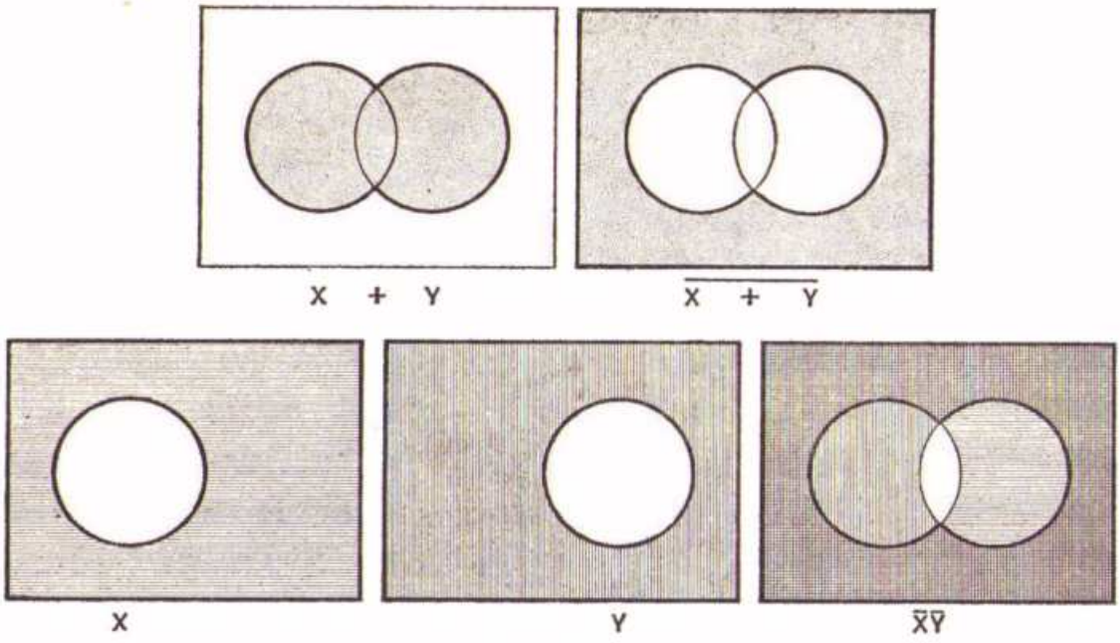
Feitelijk mag $\overline{X}$ worden uitgesproken als „niet X".
In ieder universum is het duidelijk, dat het complement van het universum de lege groep zal zijn en omgekeerd.

Regels betreffende het complement

Deze regels volgen direct uit de definitie van het complement:
Wanneer men een groep met haar complement verenigt brengt men alle elementen *uit* de originele groep en alle elementen, die *niet in* de originele groep voorkomen, onder in één groep. Het is duidelijk, dat het resultaat het gehele universum omvat. In symbolen geschreven: $X + \overline{X} = 1$.
Er zijn geen elementen, die in een groep voorkomen en tevens *niet* in die groep voorkomen. Het produkt van een groep en haar complement is de lege groep. Symbolisch: $X\overline{X} = 0$.
Aangezien een groep en haar complement het universum samen delen zonder dat zij elkaar overlappen, is elk van deze groepen het complement van de andere. Daarom is het complement van $\overline{X}$ ook weer X zelf. In symbolen $\overline{(\overline{X})} = X$.
Zeggen we bij voorbeeld dat iemand *geen niet*-inwoner van de Verenigde Staten is, dan is dat hetzelfde als wanneer we zeggen dat hij een inwoner van de Verenigde Staten *is*.
Er is een eenvoudig criterium waardoor complementen kunnen worden herkend. Twee groepen zijn elkaars complement als zij elkaar niet overlappen en samen het gehele universum vullen. Symbolisch uitgedrukt: Als $X + Y = 1$ en $XY = 0$, dan is $X = \overline{Y}$ en $Y = \overline{X}$.

Sommen tegenover produkten

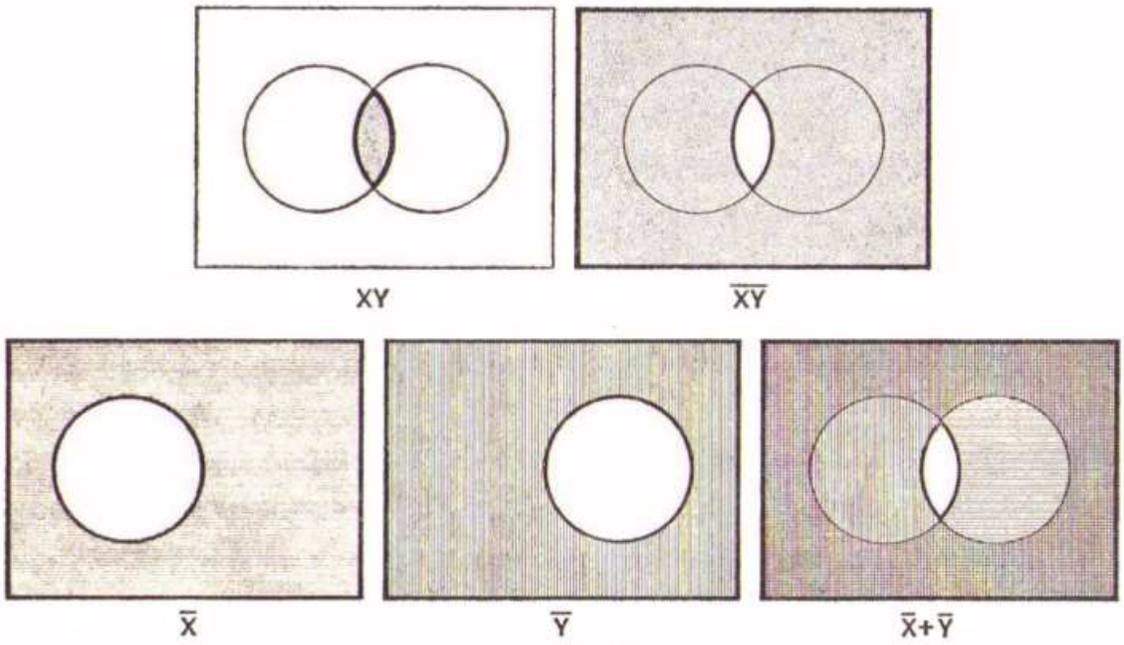
Het feit, dat iedere groep in een universum een complement heeft in dat universum leidt tot een paar interessante wetten, die bekend staan als de dualiteitswetten. Deze wetten zeggen, dat het complement van de som van twee groepen gelijk is aan het produkt van hun complementen en dat het complement van het produkt van twee groepen gelijk is aan de som van hun complementen. In symbolen geschreven $\overline{(X + Y)} = \overline{X}\,\overline{Y}$ en $\overline{(XY)} = \overline{X} + \overline{Y}$.
De eerste van deze wetten wordt bewezen met behulp van bovenstaande diagrammen van Venn. In de bovenste diagrammen tellen we eerst X en Y bij elkaar op en bepalen dan het complement van de som. In de onderste



De eerste dualiteitswet

diagrammen bepalen we eerst het complement van X en Y en vermenigvuldigen deze complementen daarna. $\overline{X}$ wordt aangegeven door een horizontale arcering en $\overline{Y}$ door een vertikale arcering. Wanneer de beide diagrammen op elkaar worden geplaatst, dan is het produkt $\overline{X} \cdot \overline{Y}$ het gedeelte, dat zowel horizontaal als vertikaal is gearceerd. Een vergelijking van de laatste diagrammen van de bovenste en onderste rij toont, dat het resultaat hetzelfde is.

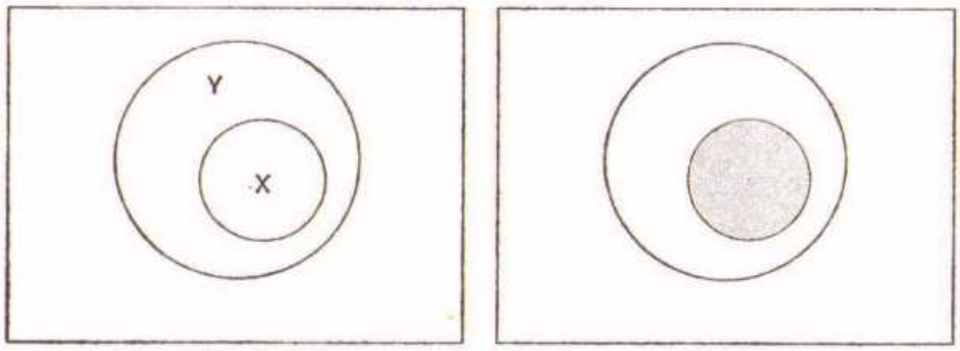
De diagrammen van Venn kunnen op soortgelijke wijze worden gebruikt om de tweede dualiteitswet te bewijzen.



De tweede dualiteitswet

Subgroep opnieuw bepaald

We hebben een speciaal symbool $\subset$ ingevoerd voor het begrip: „is een subgroep van". We kunnen echter ook zonder dit symbool, want hetzelfde begrip kan worden uitgedrukt met behulp van een som of een produkt van groepen. Onderstaand diagram van Venn laat u de situatie zien als X een subgroep is van Y. Het is in deze situatie duidelijk, dat het gedeelte van X en Y, dat zij beiden gemeen hebben, precies gelijk is aan X. Dus, als $X \subset Y$, dan is $XY = X$. Aan de andere kant als $XY = X$ wil dat zeggen, dat X het gemeenschappelijke deel is van X en Y, zodat X geheel wordt omvat door Y, of $X \subset Y$. Daarom is de bewering $X \subset Y$ equivalent aan de bewering $XY = X$ en elke bewering mag worden vervangen door de andere. Het is gemakkelijk in te zien, dat de bewering $X \subset Y$ ook equivalent is aan de bewering $X + Y = Y$. Wanneer X geheel binnen Y valt, vergroot het verenigen van X en Y de groep Y in het geheel niet.



Daarom is de vereniging van X en Y in dit geval precies gelijk aan Y. Als omgekeerd de vereniging van X en Y precies gelijk aan Y is, dan wil dat zeggen, dat X alleen elementen tot de vereniging heeft bijgedragen, die reeds in Y zijn, daarom ligt X geheel binnen Y.

Sommige regels sluiten andere in

De regels betreffende de groepen die we tot nu toe hebben behandeld, zijn niet geheel onafhankelijk van elkaar. Enkele daarvan kunnen worden afgeleid van andere. Dit feit wijst erop, dat de algebra van de groepen kan worden opgebouwd tot een deductief systeem analoog aan dat van de meetkunde. Op de HBS worden ons heel wat regels geleerd betreffende

meetkundige figuren. Maar zij worden niet voorgesteld als op zichzelf staande feiten. Ze zijn als volgt tot een systeem opgebouwd: een klein aantal regels die bekend staan als *axioma's*, is afzonderlijk gehouden van de rest om dienst te kunnen doen als ondergrond voor het systeem. Daarna worden alle regels door logische redenering afgeleid van de axioma's. De afgeleide regels staan bekend als *theorema's*. Voor de termen welke in de axioma's worden gebruikt, wordt geen definitie in woorden gegeven. De betekenis van deze termen is niet meer dan dat wat de axioma's erover te zeggen hebben. Zo proberen we in de meetkunde b.v. niet de woorden *punt* en *lijn* te definiëren. Maar we weten uit de axioma's dat er een, maar dan ook slechts een lijn gaat door twee willekeurige punten. Deze bewering maakt deel uit van de betekenis van de woorden *punt* en *lijn*. Worden echter nieuwe termen in het systeem ingevoerd, die niet in de axioma's zijn genoemd, dan worden ze eerst nauwkeurig gedefinieerd.
Wij kunnen dezelfde procedure volgen bij de regels voor de algebra van de groepen. We kunnen uit deze regels een stel kernregels kiezen, die als axioma kunnen dienst doen en waarvan we alle andere regels als theorema kunnen afleiden. Er zijn heel wat mogelijkheden om de regels te kiezen, die als axioma moeten dienst doen. Een speciale keus uit de axioma's wordt hieronder gegeven.

Axioma's voor de algebra van de groepen

Hier volgt een stel axioma's voor de algebra van de groepen. De niet gedefinieerde termen in deze axioma's zijn „groep", „plus" en „maal". De gebruikelijke symbolen worden toegepast voor „plus" en „maal".

I. Als X en Y groepen zijn, dan is er een groep Z zodanig, dat $X + Y = Z$.
II. Als X en Y groepen zijn, dan is er een groep W, zodanig, dat $XY = W$.
III. Er bestaat een groep 0, zodanig, dat als X een willekeurige groep is, $X + 0 = X$.
IV. Er bestaat een groep 1, zodanig, dat als X een willekeurige groep is $1X = X$.
V. Wanneer X en Y groepen zijn, dan is $X + Y = Y + X$.
VI. Wanneer X en Y groepen zijn, dan is $XY = YX$.
VII. Wanneer X, Y en Z groepen zijn, is $X + YZ = (X + Y)(X + Z)$.

VIII. Als X, Y en Z groepen zijn, is $X\ (Y + Z) = XY + XZ$.

XI. Als X een groep is, dan bestaat er een groep $\overline{X}$, die zodanig is, dat $X + \overline{X} = 1$ en $X\overline{X} = 0$.

X. Er bestaan groepen X en Y zodanig, dat $X \neq Y$.

De axioma's I en II stellen alleen maar vast, dat twee willekeurige groepen een som en een produkt hebben. Axioma's III en IV zijn respectievelijk de Wet van 0 en de Wet van 1. Axioma's V en VI zijn de commutatieve eigenschappen van optellen en vermenigvuldigen. Axioma's VII en VIII zijn de twee distributieve eigenschappen. Axioma IX stelt vast, dat iedere groep een complement heeft. Axioma X garandeert, dat het systeem groepen omvat, die niet leeg zijn.

Wij wijzen erop, dat de associatieve eigenschappen van de optelling en vermenigvuldiging niet in de axioma's voorkomen. Zij kunnen van deze tien axioma's als theorema worden afgeleid. Ook moeten we erop wijzen, dat het begrip *subgroep* niet begrepen is onder de ongedefinieerde termen. Wanneer we dat willen, kunnen we dit begrip definiëren met behulp van de termen, die in de axioma's voorkomen. Zo kunnen we b.v. de volgende definitie opstellen:

$X \subset Y$ zal betekenen dat $XY = X$.

Een van de zeer belangrijke regels van de logica is, dat de relatie $\subset$ transitief is. Dat is als $X \subset Y$ en $Y \subset Z$, dan is $X \subset Z$.

Deze regel is geen axioma, dus moet het een theorema zijn. Dat wil zeggen, dat we in staat zouden zijn het te *bewijzen* met behulp van de axioma's en andere theorema's. Het bewijs blijkt heel eenvoudig te zijn: Als $X \subset Y$ en $Y \subset Z$, dan is volgens de definitie van $\subset$, $XY = X$ en $YZ = Y$. De laatste bewering wil zeggen, dat Y vervangen kan worden door YZ. Wanneer we deze substitutie doorvoeren in $XY = X$, dan krijgen we $X\ (YZ) = X$. De associatieve eigenschap van de vermenigvuldiging zegt dat we $X\ (YZ)$ mogen vervangen door $(XY)\ Z$. Deze substitutie doorgevoerd levert op $(XY)\ Z = X$. Maar aangezien $XY = X$ mogen we XY weer vervangen door X. De hierdoor ontstane bewering $XZ = X$ is gelijkwaardig aan de bewering dat $X \subset Z$.

Axioma IX stelt vast, dat iedere groep een complement heeft. Het schijnt de mogelijkheid open te laten, dat een groep meer dan een complement kan hebben. Alle axioma's tezamen genomen sluiten echter deze mogelijkheid uit. Het kan als een theorema worden bewezen, dat iedere groep slechts één complement heeft, waarvan de grootte vastligt in axioma IX. Hieruit volgt, dat iedere keer als we twee groepen X en Y tegenkomen,

zodanig, dat $X + Y = 1$ en $XY = 0$ we direct kunnen vaststellen dat $X = \overline{Y}$ en $Y = \overline{X}$. (Dat wil zeggen: ze zijn elkaars complement).
Alle regels die we hebben opgeschreven betreffende optelling en vermenigvuldiging van groepen en die niet voorkomen in de lijst van de axioma's, zijn theorema's, die kunnen worden bewezen. In wat nog volgt zullen we aannemen dat zij bewezen zijn.

Abstracte algebra van Boole

We vonden de regels, die wij de axioma's I tot X noemden door uit te gaan van een bepaalde universele groep en daarna de verhouding van de subgroepen van die universele groep tot elkaar te bestuderen. Onze dagelijkse ervaring met groepen en subgroepen is de moeder, die deze axioma's het leven heeft geschonken. Maar nu begint deze reeks axioma's, evenals ieder levend kind, een onafhankelijk bestaan te leiden. We verbreken de laatste banden met de moeder door te vergeten dat de axioma's slaan op subgroepen van een universele groep. We denken eraan alsof zij slaan op een verzameling voorwerpen, waarvan de eigenschappen voor zover we daarin zijn geïnteresseerd, alleen die zijn, welke door de axioma's worden vastgelegd en door theorema's, die van de axioma's kunnen worden afgeleid. Het minderjarige systeem dat op deze wijze een onafhankelijk bestaan is gegeven, heet de algebra van Boole, een tak van de zuivere wiskunde, genoemd naar de Britse logicus George Boole, die de eerste was, die een algebra van de logica samenstelde. Om de scheiding van het begrip groep volkomen duidelijk te laten uitkomen, vervangen we het woord groep, waar het in de axioma's I tot X voorkomt, door de uitdrukking: „element van het systeem".
Wanneer we de axioma's scheiden van het begrip groep, waarvan we ze in de eerste plaats hebben afgeleid, lijkt het erop alsof we ze van hun inhoud beroven. In werkelijkheid verrijken we hen en geven onszelf een krachtiger werktuig in handen.
Er zijn *veel verschillende systemen,* waarvoor de axioma's van de algebra van Boole volkomen juist zijn. Tot nu toe hebben we alleen te maken gehad met systemen, die bestaan uit subgroepen van een universele groep. In latere hoofdstukken zullen we met enkele andere kennismaken. Terwijl we voorlopig iedere specifieke interpretatie van de algebra van Boole negeren en hem in een abstracte vorm ontwikkelen, garanderen we dat de theorema's, die we afleiden, gelden voor alle systemen, die aan de axioma's

voldoen. De theorema's die we afleiden zullen dus gelden voor de algebra van de groepen uit dit hoofdstuk. Maar ze zullen ook gelden voor de algebra van de proporties uit het volgende hoofdstuk en voor de algebra van de schakelcircuits, die in hoofdstuk X wordt beschreven.

Voorbeelden van algebra's van Boole

Alle subgroepen van een universele groep tezamen zijn een algebra van Boole. Door universele groepen van verschillende omvang te kiezen, kunnen we voorbeelden krijgen van verschillende algebra's van Boole. Wanneer b.v. de universele groep een stel van drie elementen #, % en $ is, dan heeft zij, zoals op blz. 51 werd beschreven, acht subgroepen: 1, *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, en 0. Deze acht elementen, die met elkaar in verband staan door de bewerkingen optellen, vermenigvuldigen en het bepalen van het complement, vormen een algebra van Boole. Het verband binnen dit systeem kan als volgt op duidelijke wijze worden aangegeven met behulp van tabellen.

Tabel optellen

+	1	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1
A	1	*A*	1	1	*A*	*A*	1	*A*
B	1	1	*B*	1	*B*	1	*B*	*B*
C	1	1	1	*C*	1	*C*	*C*	*C*
D	1	*A*	*B*	1	*D*	*A*	*B*	*D*
E	1	*A*	1	*C*	*A*	*E*	*C*	*E*
F	1	1	*B*	*C*	*B*	*C*	*F*	*F*
0	1	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	0

Tabel vermenigvuldigen

·	1	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	0
1	1	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	0
A	*A*	*A*	*D*	*E*	*D*	*E*	0	0
B	*B*	*D*	*B*	*F*	*D*	0	*F*	0
C	*C*	*E*	*F*	*C*	0	*E*	*F*	0
D	*D*	*D*	*D*	0	*D*	0	0	0
E	*E*	*E*	0	*E*	0	*E*	0	0
F	*F*	0	*F*	*F*	0	0	*F*	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabel van complementen

X	$\overline{X}$
1	0
A	*F*
B	*E*
C	*D*
D	*C*
E	*B*
F	*A*
0	1

Wanneer de universele groep bestaat uit twee symbolen @ en ¢, dan heeft zij de volgende subgroepen:

$1 = \{ @, ¢\}$ $A = \{@\}$ $B = \{¢\}$ $0 = \{\ \}$

Deze vier elementen vormen een algebra van Boole waarvan de interne verhoudingen door onderstaande tabellen worden uitgedrukt.

Tabel optellen

+	1	A	B	0
1	1	1	1	1
A	1	A	1	A
B	1	1	B	B
0	1	A	B	0

Tabel vermenigvuldigen

·	1	A	B	0
1	1	A	B	0
A	A	A	0	0
B	B	0	B	0
0	0	0	0	0

Tabel van complementen

X	$\overline{X}$
1	0
A	B
B	A
0	1

Wanneer de universele groep een eenheidsgroep is (dus slechts een element bevat) dan heeft zij slechts twee subgroepen: 1 en 0, de universele groep en de lege groep. Deze twee elementen vormen samen een algebra van Boole, waarvan de volledige samenstelling blijkt uit deze tabellen:

Tabel optellen

+	1	0
1	1	1
0	1	0

Tabel vermenigvuldigen

·	1	0
1	1	0
0	0	0

Tabel van complementen

X	$\overline{X}$
1	0
0	1

De algebra van Boole met slechts twee elementen wordt een tweewaardige algebra genoemd. Het is het eenvoudigste voorbeeld van de Algebra van Boole, dat mogelijk is. Zoals we in het volgende hoofdstuk zullen zien is het ook een heel belangrijk voorbeeld.

Enkele theorema's bewezen

Het bewijzen van een theorema is in de algebra van Boole een zuiver mathematische kwestie. Om te laten zien wat er nog meer voor theorema's zijn en om de techniek van het bewijzen te demonstreren, zullen we nu eens enkele bewijzen gedetailleerd uitwerken.

Om te beginnen bewijzen we, dat als X en Y elementen zijn van een algebra van Boole, $X(X + Y) = X$. We bewijzen het door een reeks uitdrukkingen op te zetten, waarbij $X(X + Y)$ de eerste en X de laatste is. We tonen meteen aan, dat iedere uitdrukking gelijk is aan die erop volgt in de reeks. Iedere gelijkheid wordt gestaafd door een axioma of theorema, dat wij reeds kennen. De reeks gelijkheden zal ons ervan overtuigen, dat de eerste uitdrukking, $X(X + Y)$, gelijk is aan de laatste, X, in de reeks.

$X(X + Y) = (X + 0)(X + Y)$, aangezien volgens axioma I, X kan worden vervangen door $X + 0$

$= X + (0 \cdot Y)$, volgens axioma VII

$= X + 0$, daar $0 \cdot Y = 0$

$= X$, volgens axioma III.

Als voorbeeld van de strekking van dit theorema zullen we het gebruiken voor het geval, dat X de groep mensen is met blauwe ogen en Y de groep mensen, die haar op hun hoofd hebben.
Wanneer we dan het maalteken lezen als *en* en het plusteken als *of*, dan zien we dat het theorema het volgende zegt: de groep mensen, die blauwe ogen hebben en die of blauwe ogen hebben of haar op hun hoofd, is identiek met de groep mensen, die blauwe ogen hebben.
Op dezelfde wijze bewijzen we dat $X + XY = X$

$X + XY = 1 \cdot X + XY$	volgens axioma IV,
$= X \cdot 1 + XY$	volgens axioma VI,
$= X(1 + Y)$	volgens axioma VIII,
$= X \cdot 1$	daar $1 + Y = 1$,
$= 1 \cdot X$	volgens axioma VI
$= X$	volgens axioma IV

Dit theorema vertelt ons, dat de groep mensen, die of blauwe ogen hebben of blauwe ogen en ook haar op hun hoofd, identiek is met de groep mensen, die blauwe ogen hebben.

Een derde theorema, dat gemakkelijk is te bewijzen, is dat $XY + X\overline{Y} = X$:

$XY + X\overline{Y} = X(Y + \overline{Y})$	volgens axioma VIII
$= X \cdot 1$	volgens axioma IX
$= 1 \cdot X$	volgens axioma VI
$= X$	volgens axioma IV

Wanneer 1 de groep van alle mensen is en Y is de groep mensen met haar op hun hoofd, dan is $\overline{Y}$ de groep van de kaalhoofdigen. Dan zegt het derde theorema, dat de groep mensen, die zowel blauwe ogen als haar op hun hoofd hebben of blauwe ogen hebben en kaalhoofdig zijn, dezelfde is als de groep van de mensen, die blauwe ogen hebben.
Als vierde voorbeeld bewijzen we dat $(X + Y)(X + \overline{Y}) = X$:

$$\begin{aligned} (X + Y)(X + \overline{Y}) &= X + (Y\overline{Y}) && \text{volgens axioma VII} \\ &= X + 0 && \text{volgens axioma IX} \\ &= X && \text{volgens axioma III} \end{aligned}$$

Wanneer we X en Y op dezelfde wijze interpreteren als hierboven, zien we uit dit theorema, dat de groep mensen, waarvan het zeker is dat zij blauwe ogen of haar op hun hoofd hebben, terwijl het ook zeker is dat zij of blauwe ogen hebben of kaalhoofdig zijn, identiek is met de groep mensen, die blauwe ogen hebben.

Equivalente uitdrukkingen

Elk van de zo juist bewezen theorema's zegt, dat twee uitdrukkingen equivalent zijn. De ene uitdrukking is gecompliceerd, de andere eenvoudig. In het laatste theorema bijvoorbeeld verklaren we, dat de gecompliceerde uitdrukking $(X + Y)(X + \overline{Y})$ equivalent is aan de eenvoudige uitdrukking X. Het is goed dat we dat weten, want dat geeft ons het recht de gecompliceerde uitdrukking te vervangen door de eenvoudigere. Wanneer X en Y groepen zijn in de interpretaties, zoals die welke we hierboven vier maal gebruikten, dan staat het theorema ons toe een ingewikkelde omschrijving van een groep te vervangen door een veel kortere en eenvoudiger omschrijving van dezelfde groep. Soms is een clausule in een contract een ingewikkelde beschrijving van een groep omstandigheden. Wanneer de clausule symbolisch wordt uitgedrukt, is het dikwijls mogelijk de clausule te vereenvoudigen met behulp van de algebra van Boole.
In hoofdstuk X zullen we ons bezighouden met situaties waarin de variabelen, die in de algebra van Boole voorkomen, toegepast worden voor schakelaars. Dan geven de theorema's, zoals die, welke we hebben bewezen, ons mogelijkheden om een ingewikkelde schakeling te vereenvoudigen. Wanneer de algebra van Boole voor dit doel wordt gebruikt, levert zij geldelijk voordeel op door economischer schakelingen.

De wet van de dualiteit

Om het praktisch nut van de algebra van Boole als middel om schakelingontwerpen te vereenvoudigen nog eens te onderstrepen zullen we nu algebraïsch enkele theorema's bewijzen, die wij in hoofdstuk XI zullen gebruiken, wanneer we het ontwerpen van elektronische rekenmachines bespreken. Het eerste van deze theorema's is de wet van de dualiteit. De twee andere vloeien voort uit deze wet.

We zullen de dualiteitswet bewijzen, die beweert dat $\overline{(X + Y)} = \overline{X}\,\overline{Y}$. In woorden uitgedrukt zegt deze wet, dat $\overline{X}\,\overline{Y}$ het complement is van $X + Y$. Om te bewijzen dat dit juist is, is het enige wat we te doen hebben, aan te tonen dat de som van $X + Y$ en $\overline{Y}\,\overline{X}$ gelijk aan 1 is, terwijl hun produkt 0 is (zie blz. 60).

Om aan te tonen dat de som van $X + Y$ en $\overline{X}\,\overline{Y}$ gelijk is aan 1, beginnen we met de ware bewering $X + \overline{X} = 1$. Aangezien we hebben bewezen dat $X + XY = X$, kunnen we X vervangen door $X + XY$. Daar $\overline{X} = 1 \cdot \overline{X} = \overline{X} \cdot 1$ kunnen we X vervangen door $X \cdot 1$. We krijgen dan $(X + XY) + \overline{X} \cdot 1 = 1$. Daar $Y + \overline{Y} = 1$ mogen we 1 links van het gelijkteken vervangen door $Y + \overline{Y}$. We krijgen dan $(X + XY) + \overline{X}\,(Y + \overline{Y}) = 1$. Volgens de distributieve eigenschappen, de commutatieve eigenschappen en de associatieve eigenschappen, die de algebra van Boole inhoudt, kunnen we het linker gedeelte op dezelfde wijze behandelen als we dat voor algebra op de HBS leerden. We krijgen dan deze reeks vergelijkingen:

$$
\begin{aligned}
&X + XY + \overline{X}Y + \overline{X}\,\overline{Y} = 1\\
&X + (X + \overline{Y})\,Y + \overline{X}\,\overline{Y} = 1\\
&X + 1 \cdot Y + \overline{X}\,\overline{Y} = 1\\
&X + Y + \overline{X}\,\overline{Y} = 1
\end{aligned}
$$

Deze laatste vergelijking is wat we wilden hebben.

Om aan te tonen, dat het produkt van $X + Y$ en $\overline{X}\,\overline{Y}$ gelijk is aan 0, gaan we ze eerst vermenigvuldigen en dan als volgt vereenvoudigen:

$$
\begin{aligned}
(X + Y)\,\overline{X}\,\overline{Y} &= X\,(\overline{X}\,\overline{Y}) + Y\,(\overline{X}\,\overline{Y})\\
&= X\,(\overline{X}\,\overline{Y}) + Y\,(\overline{Y}\,\overline{X})\\
&= (X\overline{X})\,\overline{Y} + (Y\overline{Y})\,\overline{X}\\
&= 0 \cdot \overline{Y} + 0 \cdot \overline{Y} = 0 + 0 = 0
\end{aligned}
$$

De tweede dualiteitswet, die zegt dat $\overline{X} + \overline{Y} = \overline{X}\,\overline{Y}$ kan op analoge wijze worden bewezen.

Nu zullen we de dualiteitswet gebruiken om ons te helpen bewijzen, dat als $C = AB$, dan $\bar{A}B + A\bar{B} = (A + B)\,\bar{C}$ is:

$$\begin{aligned} \bar{A}B + A\bar{B} &= \bar{A}B + 0 + 0 + A\bar{B} \\ &= \bar{A}B + \bar{B}B + A\bar{A} + A\bar{B} \\ &= B\,(\bar{A} + \bar{B}) + A\,(\bar{A} + \bar{B}) \\ &= B\,(\overline{AB}) + A\,(\overline{AB}) \\ &= B\bar{C} + AC \\ &= (B + A)\,\bar{C} = (A + B)\,\bar{C} \end{aligned}$$

Als tweede consequentie van de dualiteitswet bewijzen wij dat $\overline{\overline{AB} + A\bar{B}} = AB + \bar{A}\bar{B}$. De dualiteitswet zegt, dat het complement van de som van twee groepen gelijk is aan het produkt van hun complementen. Dan is $\overline{\overline{AB} + A\bar{B}}$, dat het complement is van de som van $\overline{AB} + A\bar{B}$, gelijk aan het produkt van het complement van $\overline{AB}$ en het complement van $A\bar{B}$. Maar volgens de dualiteitswet is het complement van een produkt van twee groepen, gelijk aan de som van hun complementen, dus is het complement van $\overline{AB}$ gelijk aan $A + \bar{B}$ en het complement van $A\bar{B}$ gelijk aan $\bar{A} + B$.

Wanneer we dit alles samenvatten en gaan vereenvoudigen, dan krijgen we de volgende reeks gelijkheden:

$$\begin{aligned} \overline{\overline{AB} + \bar{A}B} &= (\overline{\overline{AB}})\,(\overline{A\bar{B}}) \\ &= (A + \bar{B})\,(\bar{A} + B) \\ &= A\bar{A} + AB + \bar{B}\bar{A} + \bar{B}B \\ &= 0 + AB + \bar{A}\bar{B} + 0 \\ &= AB + \bar{A}\bar{B} \end{aligned}$$

Een tellingprobleem

Er zijn heel wat praktisch voorkomende situaties waarin we te maken krijgen met groepen waartussen onderling een ingewikkeld verband bestaat. Wanneer de groepen in woorden worden omschreven, kan het moeilijk zijn het onderlinge verband te ontrafelen. Wordt echter gebruik gemaakt van de algebra van Boole, dan wordt het tot uitdrukking brengen van het onderlinge verband en het oplossen van vraagstukken daarover een wiskundige routineoefening. Om aan te tonen op welke wijze de algebra van Boole ons helpt met technieken voor het oplossen van vraagstukken op het gebied van de logica, zullen we haar toepassen op drie moeilijke vraagstukken, die niet veel verschillen van de problemen, die zich kunnen voordoen bij verzekeringen, handel of industrie.

Het eerste vraagstuk, dat we te lijf gaan is een tellingprobleem. Op een hogeschool met 100 studenten werd een telling gehouden van de studenten welke zekere speciale cursussen volgden. De secretaris, die dit overzicht samenstelde, rapporteerde dat er 21 studenten biologie studeerden, 40 studenten chemie, 50 natuurkunde, 11 studenten chemie en natuurkunde, 9 studenten biologie en natuurkunde, 20 studenten biologie en chemie en 5 studenten, die zowel biologie als chemie en natuurkunde volgden. Toen de rector magnificus het rapport had bestudeerd, gooide hij het in de prullenmand en gaf de secretaris een standje. Waarom?
Om het waarom in te zien, gaan we de samenhang bestuderen tussen de verschillende gegevens uit het rapport. We nemen aan, dat B de groep studenten is, die biologie studeert, C de groep studenten in de chemie en P de groep natuurkundige studenten. Dan is $\bar{B}$ de groep studenten, die geen biologie studeert, $\bar{C}$ de groep studenten, die geen chemie bestudeert en $\bar{P}$ de groep, die zich niet met natuurkunde bezighoudt. Zoals gebruikelijk is 1 weer de universele groep, die in dit geval alle studenten aan de school omvat. Wanneer X een groep is, kan $n(X)$ het aantal leden van de groep aangeven. Het rapport van de secretaris kan dan als volgt worden samengevat:

$n(1) = 100$		$n(CP) = 11$	
$n(B) = 21$		$n(BP) = 9$	
$n(C) = 40$		$n(BC) = 20$	
$n(P) = 50$		$n(BCP) = 5$	

We weten dat $B + \bar{B} = 1$. Vermenigvuldiging met CP levert op $CP\ (B + \bar{B}) = (CP)\ 1$. Dus is $CPB + CP\bar{B} = CP$. Hieruit blijkt, dat de groep CP kan worden gesplitst in twee groepen CPB en $CP\bar{B}$. Verder overlappen deze groepen elkaar niet, want $(CPB) \cdot (CP\bar{B}) = CCPP\ (B\bar{B}) = CP \cdot 0 = 0 =$ de lege groep. Dus, $n(CPB) + n(CP\bar{B}) = n(CP)$. Maar volgens het rapport is $n(CPB)$, wat hetzelfde is als $n(BCP)$, gelijk aan 5 en $n(CP) = 11$. Dus $5 + n(CP\bar{B}) = 11$. Hieruit volgt dat $n(CP\bar{B}) = 6$. Op overeenkomstige wijze krijgen we door vermenigvuldiging van $C + \bar{C} = 1$ met BP als uitkomsten $BPC + BP\bar{C} = BP$ en $n(BPC) + n(BP\bar{C}) = n(BP)$. Hieruit volgt $5 + n(BC\bar{P}) = 20$ en $n(BC\bar{P}) = 15$. Nu vermenigvuldigen we de vergelijking $(P + \bar{P})\ (C + \bar{C}) = 1$ met B. Dat levert op $B\ (P + \bar{P})\ (C + \bar{C}) = B$. Uitwerking van het linker gedeelte van deze vergelijking heeft als resultaat $BPC + BP\bar{C} + B\bar{P}C + B\bar{P}\bar{C} = B$. Deze vergelijking drukt een splitsing uit van groep B in vier groepen. Het is

gemakkelijk in te zien, dat er daarbij geen twee zijn, die elkaar overlappen, aangezien het produkt van welke twee van deze groepen ook steeds 0 oplevert. Daarom is het noodzakelijk, dat $n(BPC) + n(BP\bar{C}) + n(B\bar{P}\bar{C}) + n(\bar{B}PC) = n(B)$. Deze vergelijking vereist, dat $5 + 4 + 15 + n(B\bar{P}\bar{C}) = 21$, wat onmogelijk is, hoe klein de groep $B\bar{P}\bar{C}$ ook is. De getallen in het rapport van de secretaris waren dus onbestaanbaar en zijn overzicht was niet nauwkeurig.

Een puzzel van Lewis Carroll

Lewis Carroll, die we het beste kennen als de auteur van *Alice in Wonderland,* was een wiskundige en logicus. Hij stelde verschillende onderhoudende problemen op het gebied van de logica op, die hij als oefeningen opnam in zijn boek *Symbolic Logic.* De volgende puzzel, die wij zullen oplossen is een van deze oefeningen.
De vraag is uit te zoeken welke conclusie de logische consequentie is van de volgende tien proposities:

1. De enige dieren in dit huis zijn katten;
2. Ieder dier is geschikt als lievelingsdier, dat ervan houdt naar de maan te staren.
3. Als ik een dier verafschuw, mijd ik het.
4. Dieren zijn geen vleeseters, behalve wanneer zij 's nachts rondsluipen.
5. Geen kat blijft in gebreke bij het doden van muizen;
6. Dieren komen nooit naar me toe, behalve die in dit huis zijn;
7. Kangoeroes zijn niet geschikt als lievelingsdieren;
8. Alleen vleeseters doden muizen;
9. Ik verafschuw dieren, die niet naar me toekomen.
10. Dieren, die 's nachts rondsluipen houden er altijd van naar de maan te staren.

Om dit probleem met behulp van de algebra van Boole op te lossen gaan we eerst symbolen invoeren voor de verschillende groepen.

Stel 1 = de universele groep = de groep van alle dieren
A = de groep dieren, die ik mijd
B = de groep vleesetende dieren
C = de groep katten
D = de groep dieren, die ik verafschuw
E = de groep dieren in dit huis
H = de groep kangoeroes

K = de groep dieren, die muizen doden
L = de groep dieren, die ervan houden naar de maan te staren
M = de groep dieren, die 's nachts rondsluipen
N = de groep dieren, die geschikt is voor lievelingsdier
R = de groep dieren, die naar me toe komen.

In deze symbolen uitgedrukt nemen de tien proposities de volgende vorm aan:

(1) $EC = E$ (6) $RE = R$
(2) $LN = L$ (7) $H\bar{N} = H$
(3) $DA = D$ (8) $KB = K$
(4) $BM = B$ (9) $\bar{R}D = R$
(5) $CK = C$ (10) $ML = M$

Nu gaan we als volgt een reeks vergelijkingen opzetten:: vermenigvuldig (1) met R om $R\,(EC) = RE$ te krijgen. Door gebruik te maken van de associatieve eigenschap van de vermenigvuldiging, kunnen we dit ook schrijven als $(RE)\ C = RE$. Volgens vergelijking (6) mag RE worden vervangen door R. We vinden nu vergelijking (11), $RC = R$. Vermenigvuldig vergelijking (5) met R en pas de associatieve eigenschap toe om $(RC)\ K = RC$ te vinden. Volgens vergelijking (11) kan RC worden vervangen door R. We krijgen dan vergelijking (12), $RK = R$. Vermenigvuldig vergelijking (8) met R en pas de associatieve eigenschap toe om te krijgen: $(RK)\ B = RK$. Volgens vergelijking (12) mag RK worden vervangen door R en daardoor ontstaat dan vergelijking (13): $RB = R$. Vermenigvuldig vergelijking (4) met R en gebruik de associatieve eigenschap om te komen tot $(RB)\ M = RB$. Volgens vergelijking (13) mag RB worden vervangen door R, wat vergelijking (14) $RM = R$ oplevert. Vermenigvuldig vergelijking (10) met R en pas de associatieve eigenschap toe om $(RM)\ L = RM$ te krijgen. Volgens vergelijking (14) kan RM worden vervangen door R en dan ontstaat vergelijking (15) $RL = R$. Vermenigvuldig vergelijking (2) met R en pas de associatieve eigenschap toe om te komen tot $(RL)\ N = RL$. Volgens vergelijking (15) mogen we RL vervangen door R en zo ontstaat dan vergelijking (16) $RN = R$. Vermenigvuldig vergelijking (7) met R. Dat levert op $R\ (H\bar{N}) = RH$. Volgens vergelijking (16) mogen we de R aan de linkerzijde vervangen door RN, waaruit dan ontstaat $(RN)\ (H\bar{N}) = RH$. Door nu de associatieve en de commutatieve eigenschappen van de vermenigvuldiging toe te passen, teneinde de volgorde en de groepering van de factoren aan de linkerzijde te veranderen, krijgen we $(N\bar{N})\ (RH) = RH$. Maar $N\bar{N} = 0$ en dus kunnen we ook schrijven $0\ (RH) = RH$ en dus ook

$RH = 0$. We weten, dat $R + \bar{R} = 1$. Vermenigvuldigen we deze vergelijking met H, dan krijgen we $HR + H\bar{R} = H$. Maar $HR = RH = 0$, waaruit volgt $H\bar{R} = H$ en dit noemen we vergelijking (17). Vermenigvuldig vergelijking (9) met H en gebruik de associatieve eigenschap om te krijgen: $(H\bar{R})\ D = H\bar{R}$. Volgens vergelijking (17) mogen we $H\bar{R}$ vervangen door H. Nu ontstaat vergelijking (18) $HD = H$. Vermenigvuldig vergelijking (3) met H en pas de associatieve eigenschap toe om $(HD)\ A = HD$ te krijgen. Volgens vergelijking (18) mogen we HD door H vervangen. Onze laatste uitkomst is dan $HA = H$. Dat is gelijkwaardig aan de bewering $H \subset A$. De conclusie uit de proposities (1) tot (10) is dus de propositie: *Ik vermijd altijd kangoeroes.*

Wie is de machinist?

De derde puzzel, die we met behulp van de algebra van Boole zullen oplossen, is puzzelliefhebbers waarschijnlijk wel bekend. Hier is een van de vele variaties ervan. Voor het gemak nummeren we de verschillende stellingen, die zijn gegeven.

1. Smits, Jansen en Rubens zijn de conducteur, de remmer en de machinist op een trein, maar niet noodzakelijk in deze volgorde.
2. Er zijn drie passagiers in de trein, die Mr. Smits, Mr. Jansen en Mr. Rubens heten. We zullen de titel *Mr.* alleen gebruiken als we het over een van deze passagiers hebben.
3. De conducteur woont in Maastricht.
4. De naamgenoot van de conducteur (de passagier, die dezelfde naam draagt als de conducteur) woont in Purmerend.
5. Mr. Jansen verdient *f* 10.000 per jaar.
6. Mr. Rubens woont in Quatre-Bras.
7. Een van de drie passagiers woont naast de conducteur.
8. De conducteur verdient in contanten per jaar precies een derde van het salaris van zijn buurman.
9. Smits verslaat de remmer met biljarten.

De vraag is nu: Wie is de machinist?

In onderstaande oplossing geven we, na definitie van de symbolen, die worden gebruikt, alleen maar een reeks vergelijkingen. De lezer wordt in staat geacht deze te kunnen volgen aan de hand van reeds bekende gegevens en de betreffende axioma's en theorema's. (Denk er hierbij aan, dat als X een subgroep is van Y, $XY = X$ en dat als X en Y geen elementen gemeen hebben $XY = 0$).

Stel S = de eenheidgroep waartoe Smits behoort
J = de eenheidsgroep waartoe Jansen behoort
C = de eenheidsgroep waartoe de conducteur behoort
B = de eenheidsgroep waartoe de remmer behoort
E = de eenheidsgroep waartoe de machinist behoort
C' = de eenheidsgroep waartoe de naamgenoot van de conducteur behoort
S' = de eenheidsgroep waartoe Mr. Smits behoort
J' = de eenheidsgroep waartoe Mr. Jansen behoort
R' = de eenheidsgroep waartoe Mr. Rubens behoort
T = de groep mensen, die f 10.000 per jaar verdient
M = de groep van alle mensen, die in Maastricht wonen
P = de groep van alle mensen, die in Purmerend wonen
Q = de groep van alle mensen, die in Quatre-Bras wonen
C'' = de eenheidsgroep, waartoe de naaste buurman van de conducteur behoort.

$S + J + R = C + B + E$
$SJ = 0$, $SR = 0$ en $JR = 0$
$CM + C$. Dus $CP = 0$ en $CQ = 0$
$C'P = C'$. Dus $C'M = 0$ en $C'Q = 0$
$R'Q = R'$. Dus $R'M = 0$ en $R'P = 0$
$J'T = J'$. $SB = 0$
$C''M = C''$, dus $C''P = 0$ en $C''Q = 0$
$C''(S' + J' + R') = C''$. $C''T = 0$
$C''(S' + J'T + R') = C''$
$C''S + C''J'T + C''R' = C''$
Zodat $C''S' + C''R' = C''$
$M(C''S' + C''R') = MC''$
$MC''S' + MC''R' = MC''$
Dus $C''S' = C''$, zodat $C'' = S'$ en $S'P = 0$
$C'(S' + J' + R') = C'$
$C'S' + C'J' + C'R' = C'$
$P(C'S' + C'J' + C'R') = PC'$
$C'(S'P) + (C'P)J' + C'(R'P) = PC'$
Dus $C'J' = C'$, zodat $C' = J'$ en $C = J$
Maar als $C = J$, dan is $SC = SJ = 0$
$S(C + B + E) = S$
$SC + SB + SE = S$, dus $SE = S$ en $S = E$.
Dat wil dus zeggen: *Smits is de machinist.*

HOOFDSTUK IX

ALGEBRA VAN DE PROPOSITIES

Proposities over proposities

Iedere propositie is waar of onwaar. Het kenmerkende werk van een wetenschapsman is uit te zoeken of proposities waar of onwaar zijn. De proposities betreffen dan altijd het onderwerp van zijn wetenschap. De bioloog probeert het ware van het onware te scheiden tussen de proposities over planten en dieren en hun verhouding tot elkaar en tot de omgeving. De scheikundige tracht het ware van het onware te scheiden tussen de proposities betreffende scheikundige stoffen en hun samenstellingen. De natuurkundige tracht het ware van het onware te scheiden tussen proposities over materie en energie.

De logicus onderzoekt eveneens de graad van nauwkeurigheid van de proposities op zijn gebied. Een belangrijk deel van de wetenschap van de logica heeft te maken met proposities en hun onderling verband. Op deze wijze tracht de logicus het ware van het onware te scheiden onder de *proposities over proposities.*

Hier volgt een typerende propositie, die we bij de studie van de logica kunnen tegenkomen. Als het waar is, dat als het regent de grond nat is en als het waar is, dat als de grond nat is, ook uw schoenen nat worden, dan is het ook waar, dat als het regent uw schoenen nat worden. Dit is een vrij ingewikkelde propositie, die is opgebouwd uit eenvoudiger proposities. De eenvoudigere proposities zijn: het regent; de grond is nat; uw schoenen worden nat. Ze zijn samengevoegd tot de ingewikkelde propositie met behulp van de woordjes „als . . . . dan" en het woord „en". Deze laatste woorden worden *verbindingen* genoemd. De woorden „als" . . —„dan" kunnen worden vervangen door „sluit in", zodat het gedeelte van de propositie dat zegt: „. . . . als het regent de grond nat is" kan worden vervangen door *„Het regent* sluit in dat *de grond nat is"*. Om de opbouw van de ingewikkelde propositie duidelijker te tonen, zullen we de letter *p* gebruiken voor de propositie „Het regent". De letter *q* komt in de plaats van „de grond is nat" en de letter *r* vervangt „uw schoenen worden nat".

De propositie luidt dan: „Als p q insluit en q r insluit, dan sluit p ook r in". U ziet, dat deze propositie louter de transitieve eigenschap van de relatie „sluit in" verklaart, zodat het waar is voor welke propositie p, q en r ook in de plaats worden gebruikt. De waarheid van deze propositie hangt alleen af van haar gedaante. Een van de belangrijkste doeleinden van de logicus is propositie van deze soort te ontdekken. Aangezien voor zijn doel p, q en r voor iedere willekeurige propositie in de plaats kunnen worden gezet, is het gunstiger voor hem zijn beweringen in termen met dergelijke variabelen op te stellen dan in specifieke proposities.

Symbolen voor waarheidswaarden

Het voorbeeld volgend van de logicus zullen we kleine letters, zoals p, q en r gebruiken als variabelen, die in de plaats komen van proposities, net zoals we bij gewone algebra letters als x, y en z gebruiken als variabelen, die in de plaats komen van getallen. Aangezien we symbolen zullen gebruiken voor proposities, mogen we ook symbolen gebruiken voor hun waarheidswaarden. Laten we besluiten het symbool 1 te gebruiken voor *waar* en het symbool 0 voor *onwaar*. Laten we verder ook aannemen, dat als er een kleine letter wordt gebruikt voor een propositie, de overeenkomstige hoofdletter gebruikt zal worden voor haar waarheidswaarde. Dus als p in de plaats komt van een of andere propositie, kan P maar twee waarden hebben: 1 en 0. Wanneer p de propositie is: „Alle mensen zijn sterfelijk" dan is $P = 1$. Betekent p echter de propositie „Het oppervlak van een cirkel is gelijk aan twee maal het kwadraat van de straal" dan is $P = 0$.

Symbolen voor verbindingen

De verbindingen „als . . . dan" en „en" maken het ons mogelijk nieuwe samengestelde proposities te vormen van oude proposities. Andere verbindingen die tot hetzelfde doel dienen, zijn de woorden „of", „niet" en „als en alleen als". We zullen nu de bedoeling van elk van deze verbindingen aangeven en een geschikt symbool ervoor invoeren.
Of. Stel dat p en q proposities zijn. Dan is de propositie p of q de propositie, die aangeeft, dat minstens een van de proposities p en q waar is.

We zullen een plusteken gebruiken in plaats van *of,* dus p of q zal dan geschreven worden als $p + q$. Staat bij voorbeeld p in de plaats van de propositie „het regent" en q voor de propositie „de grond is nat, dan staat $p + q$ in de plaats van „of het regent, of de grond is nat, of het regent en de grond is nat". De bewering $p + q$ heet de *scheiding* van p en q.
En. De propositie p en q is de propositie, die aangeeft dat zowel p als q waar zijn. We zullen een maalteken gebruiken (dat meestal wordt weggelaten) in de plaats van *en,* zodat p en q wordt geschreven als pq. Als p in de plaats staat van „het regent" en q in de plaats van „de grond is nat", dan staat pq voor „Het regent en de grond is nat". De propositie pq wordt genoemd de *vereniging* van p en q.
Niet. De propositie *niet* p is de propositie, die aangeeft dat p niet waar is. We zullen het symbool $\sim$ gebruiken voor *niet,* zodat *niet* p geschreven wordt $\sim p$. Als p in de plaats staat van „het regent", dan staat $\sim p$ voor „Het is niet waar dat het regent" of korter „Het regent niet". De propositie $\sim p$ heet de *ontkenning* van p.
Als . . . dan. De propositie *als* p, *dan is* q, is de propositie die aangeeft dat als p onwaar is, q waar of onwaar kan zijn. Maar als p waar is, ook q waar is. We zullen een liggend pijltje met één punt gebruiken voor *als . . . . . dan,* zodat *als* p, *dan is* q geschreven zal worden $p \rightarrow q$. De propositie $p \rightarrow q$ heet de *bepaling* van p en q.
Als en alleen als. De propositie p *als en alleen als* q is de propositie die aangeeft, dat p en q of beide waar of beide onwaar zijn. We zullen een liggend pijltje met twee punten gebruiken in de plaats van *„als en alleen als",* zodat p *als en alleen als* q geschreven zal worden $p \leftrightarrow q$. De propositie $p \leftrightarrow q$ wordt de „biconditional" van p en q genoemd.

Waarheidstabellen

De uitdrukking $p + q$ is geen propositie. Het is alleen een op een propositie gebaseerde vorm. Zij wordt een propositie als p en q worden vervangen door duidelijke proposities. De waarheidswaarde van de propositie, die daarvan het resultaat is, hangt af van de waarheidswaarden van de proposities, die in de plaats komen van $p + q$. Laten we $P + Q$ schrijven voor de waarheidswaarde van $p + q$. Per definitie is $p + q$ waar, als of p of q beide waar zijn. Anders is $p + q$ onwaar. Daarom is $P + Q = 1$ als $P = 1$ of $Q = 1$ of $P = Q = 1$.

Anders is $P + Q = 0$. Deze feiten kunnen gemakkelijk worden verzameld in onderstaande *waarheidstabel,* die de waarheidswaarde van $p + q$ aangeeft voor alle mogelijke combinaties van waarheidswaarden voor p en q.

P	Q	$P + Q$
1 (p is waar)	1 (q is waar)	1 (p *of* q is waar)
1 (p is waar)	0 (q is onwaar)	1 (p *of* q is waar)
0 (p is onwaar)	1 (q is waar)	1 (p *of* q is waar)
0 (p is onwaar)	0 (q is onwaar)	0 (p *of* q is onwaar)

We zullen PQ schrijven voor de waarheidswaarde van pq, $\sim P$ voor de waarheidswaarde van $\sim p$, $P \rightarrow Q$ voor de waarheidswaarde van $p \rightarrow q$ en $P \longleftrightarrow Q$ voor de waarheidswaarde van $p \longleftrightarrow q$. De waarheidstabellen voor deze op een propositie gebaseerde vormen kunnen op grond van bovenstaande definities gemakkelijk worden opgesteld.

P	Q	PQ
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

P	$\sim P$
1	0
0	1

P	Q	$P \rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Wanneer we deze vijf grond-waarheidstabellen gebruiken, kunnen we de waarheidstabellen samenstellen voor ingewikkelder bewerende vormen, waarbij meer dan een verbinding wordt gebruikt. Om b.v. de mogelijke waarheidswaarden te zoeken van $(\sim p) + q$, die gelden voor alle combinaties waarheidswaarden van p en q, gebruiken we de waarheidstabellen voor $\sim p$ en voor $p + q$. Schrijf de combinaties van waarden voor P en Q in de eerste twee kolommen. In de derde kolom wordt de waarde van $\sim P$ ingevuld, die overeenkomt met elke waarde van P. Als $P = 1$, dan is

$\sim P = 0$ en omgekeerd. Zet daarna in de vierde kolom de waarden van $(\sim P) + Q$, die overeenkomen met de combinaties van waarden van $\sim P$ en Q. Alleen wanneer $P = Q = 0$ zal $P + Q = 0$ zijn. In alle andere gevallen is het $P + Q = 1$. Daaruit volgt dat $(\sim P) + Q = 0$ alleen als $\sim P = Q = 0$. Anders is $(\sim P) + Q = 1$.

P	Q	$\sim P$	$(\sim P) + Q$
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

Gelijkwaardige op een propositie gebaseerde vormen

In de laatste tabel gebruikten we de derde kolom alleen om ons te helpen bij het bepalen van de boekingen in de vierde kolom. Nu deze kolom haar dienst heeft gedaan kunnen we haar verder negeren. De volledige waarheidstabel voor $(\sim p) + q$ bestaat uit de kolommen 1, 2 en 4. Wanneer we die vergelijken met de drie kolommen in de waarheidstabel voor $p \rightarrow q$, dan zien we dat de waarheidstabel voor $p \rightarrow q$ precies gelijk is aan die voor $(\sim p) + q$. Wanneer twee op een propositie gebaseerde vormen dezelfde waarheidstabel hebben, dan zeggen we, dat ze *gelijkwaardig* zijn. Vormen, die gelijkwaardig zijn, zijn of beide waar of beide onwaar. Daarom zal als X en Y gelijkwaardig zijn, $X \longleftrightarrow Y$ zijn. Hieruit volgt, dat het symbool $\longleftrightarrow$ gelezen mag worden als „is gelijkwaardig met".
Om alle mogelijke waarheidswaarden van $\sim (\sim p)$ uit te rekenen, maken we een tabel klaar met drie kolommen, zoals hieronder is aangegeven. In de eerste kolom zetten we al de mogelijke waarheidswaarden van p. In de tweede kolom komen de overeenkomstige waarheidswaarden van $\sim p$. Zij zijn het tegengestelde van de waarheidswaarden van p. Dus als $p = 0$, wordt $\sim p = 1$ en omgekeerd. In de derde kolom zetten we de waarheidswaarden van $\sim (\sim p)$. Zij zijn het tegengestelde van de waarheidswaarden van $\sim p$. Vergelijk nu eens de derde kolom met de eerste. Zij zijn precies aan elkaar gelijk. Met andere woorden p en $\sim (\sim p)$ heb-

ben dezelfde waarheidstabellen. Daarom is p equivalent aan $\sim (\sim p)$. Dat is $p \longleftrightarrow \sim (\sim p)$. Dit is de bekende regel van het „dubbel negatieve".

P	$\sim P$	$\sim(\sim P)$
1	0	1
0	1	0

Om alle mogelijke waarheidswaarden te berekenen van $(p \rightarrow q) \cdot (q \rightarrow p)$, dat wordt gelezen als „p sluit q in en q sluit p in", moeten we een tabel met 5 kolommen klaarmaken. In de eerste twee kolommen zetten we alle mogelijke combinaties van waarheidswaarden van de twee proposities p en q. In de derde kolom komen de overeenkomstige waarheidswaarden van $p \rightarrow q$. $P \rightarrow Q$ is 0 als $P = 1$ en $Q = 0$. Anders is het 1. In de vierde kolom schrijven we de overeenkomstige waarheidswaarden voor $q \rightarrow p$. Nu is $Q \rightarrow P = 0$ als $Q = 1$ en $P = 0$. Anders is het 1. In de vijfde kolom de overeenkomstige waarheidswaarden van $(p \rightarrow q)\ (q \rightarrow p)$. De waarde is 1 als de waarde die in de kolommen 3 en 4 voorkomt, 1 is. In alle andere gevallen is het 0.

P	Q	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$	$(P \rightarrow Q)(Q \rightarrow P)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Wanneer we de eerste, tweede en vijfde kolom van deze tabel vergelijken met de tabel voor $p \longleftrightarrow q$, dan zien we dat $p \longleftrightarrow q$ gelijkwaardig is aan $(p \rightarrow q)\ (q \rightarrow p)$. Daarom wordt $(p \longleftrightarrow q$ de „biconditional" (?) genoemd.
Als praktische oefening kunt u eens proberen aan te tonen, dat de op een propositie gebaseerde vorm $pq \longleftrightarrow p$ gelijkwaardig is aan $p \rightarrow q$.

Het verminderen van het aantal verbindingen

Wanneer twee op een propositie gebaseerde vormen gelijkwaardig zijn, hebben ze dezelfde waarheidswaarden, welke proposities ook in de plaats

worden gesteld van de variabelen, die in deze vorm voorkomen. Om dat feit tot uitdrukking te brengen zetten we een „gelijkteken" tussen de uitdrukkingen voor haar waarheidswaarden. Dus, daar p is gelijkwaardig aan $\sim (\sim p)$ zeggen we $P = \sim (\sim P)$. Aangezien $p \rightarrow q$ gelijkwaardig is aan $(\sim p) + q$, zeggen we $P \rightarrow Q = (\sim P) + Q$. Daar $p \longleftrightarrow q$ gelijkwaardig is aan $(p \rightarrow q)\ (q \rightarrow p)$, zeggen we $P \longleftrightarrow Q = (P \rightarrow Q)\ (Q \rightarrow P)$. Als twee op proposities gebaseerde vormen altijd dezelfde waarheidswaarden hebben, wil dat natuurlijk ook zeggen, dat zij dezelfde waarheidstabellen hebben en dus gelijkwaardig moeten zijn. De bewering, dat twee op proposities gebaseerde vormen gelijkwaardig zijn, kan worden vervangen door de bewering. dat de uitdrukkingen voor hun waarheidswaarden gelijk zijn.
In de uitdrukkingen voor de waarheidswaarden die we hebben onderzocht, komen vijf verschillende verbindingen voor. We kunnen dat aantal nu tot drie terugbrengen. Aangezien $P \rightarrow Q = (\sim P) + Q$, kunnen we altijd $P \rightarrow Q$ door $(\sim P) + Q$ vervangen. Op deze wijze vervangen we de verbinding $\rightarrow$ door een uitdrukking, waarin de verbindingen $\sim$ en $+$ worden gebruikt. Daar $P \longleftrightarrow Q = (P \rightarrow Q)\ (Q \rightarrow P)$ kunnen we deze substituties hierin doorvoeren en we krijgen dan $P \longleftrightarrow Q = [(\sim P) + Q] \cdot [(\sim Q) + P]$. Op deze wijze kan dus iedere uitdrukking, waarin de verbinding $\longleftrightarrow$ voorkomt, worden vervangen door een uitdrukking, waarin de verbindingen $\sim$, . en $+$ worden gebruikt. Dank zij deze substituties kunnen alle uitdrukkingen waarin de vijf oorspronkelijke verbindingen worden gebruikt, worden omgezet in uitdrukkingen, waarin slechts de drie verbindingen *niet, en* en *of* voorkomen.

Algebra van de proposities

De woorden *niet, en* en *of* zijn reeds eerder in een ander verband naar voren gekomen. In hoofdstuk VIII, waarin we de algebra van de groepen nader hebben onderzocht, was het woord *niet* het sleutelwoord om de bewerking van het bepalen van het complement van een groep te definiëren. Het woordje *en* was het sleutelwoord in de bewerking, die wij vermenigvuldiging noemden en het woordje *of* was het sleutelwoord voor de bewerking, die wij optellen noemden. Het bepalen van het complement, vermenigvuldiging en optelling zijn de drie grondbewerkingen van de algebra van Boole voor de groepen. Dit suggereert de mogelijkheid, dat er

ook een algebra van de proposities bestaat. We beschikken al over alle elementen om een dergelijke algebra te kunnen opstellen. Als het systeem van elementen waaruit de algebra wordt samengesteld, zullen we gebruik maken van de *waarheidswaarden* van proposities. Voor de grondbewerkingen in de algebra maken we gebruik van de verbinding *niet, en* en *of,* aangeduid door de symbolen $\sim$, . en $+$. We hebben al tabellen voor deze bewerkingen in de vorm van waarheidstabellen:

P	Q	$P+Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

P	Q	PQ
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

P	$\sim P$
1	0
0	1

De twee eerste tabellen kunnen in een andere vorm worden opgezet, waarbij de waarden van P aan de linkerkant worden geschreven en de waarden van Q aan de bovenzijde. Dit is de vorm, zoals die meestal wordt gebruikt voor optel- en vermenigvuldigtabellen.

+	1	0
1	1	1
0	1	0

·	1	0
1	1	0
0	0	0

P	$\sim P$
1	0
0	1

Wanneer we deze tabellen vergelijken met die op blz. 67 dan zien we dat het precies de tabellen zijn voor een tweewaardige algebra van Boole, waarbij scheiding de plaats inneemt van optellen, vereniging de plaats van vermenigvuldiging en ontkenning de plaats van het bepalen van het complement. Hieruit volgt, dat de *algebra van de proposities een algebra van Boole is.* Dat wil zeggen, dat alle axioma's en theorema's van de algebra van Boole ware beweringen zijn over de waarheidswaarden van proposities. Het is natuurlijk duidelijk, dat we bij dergelijke beweringen iedere uitdrukking moeten vervangen door de overeenkomstige uitdrukking, b.v. X door $\sim X$.

Nu we weten, dat de algebra van de proposities een algebra van Boole is beschikken we over een methode om gelijkwaardige op een propositie gebaseerde vormen te identificeren, zonder daarvoor de waarheidstabellen op te stellen. Twee op een propositie gebaseerde vormen zijn gelijkwaardig, wanneer we de uitdrukking voor de waarheidswaarde van de ene kunnen omzetten in de uitdrukking voor de waarheidswaarde van de andere met behulp van de eigenschappen van de algebra van Boole. Een van de distributieve eigenschappen b.v. zegt, dat $P\,(Q + R) = PQ + PR$, dus moeten $p\,(q + r)$ en $pq + pr$ dezelfde waarheidstabellen hebben. Dit feit kan direct worden gecontroleerd aan de hand van onderstaande waarheidstabellen.

P	Q	R	$Q + R$	$P(Q + R)$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0
0	0	0	0	0

P	Q	R	PQ	PR	$PQ + PR$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Het valt op, dat we in deze waarheidstabellen acht regels nodig hebben om rekening te kunnen houden met alle acht mogelijke combinaties van de waarheidswaarden van de drie proposities p, q en r.
De dualiteitswet zegt, dat $\sim (P + Q) = (\sim P)\,(\sim Q)$. Controleert u nu eens bij wijze van praktische oefening, dat $\sim (p + q)$ en $(\sim p)\,(\sim q)$ dezelfde waarheidstabellen hebben.

Tautologieën

Er zijn enkele op proposities gebaseerde vormen, die altijd de waarheidswaarde 1 hebben, onverschillig welke proposities ook in de plaats worden gezet van de variabelen, die in de vorm voorkomen. Dergelijke vormen zijn gemakkelijk te herkennen aan het feit, dat alleen het cijfer 1 in de laatste kolom van hun waarheidstabel voorkomt. Dit noemen we tautologieën. Wanneer we twee op proposities gebaseerde vormen koppelen door de verbinding $\longleftrightarrow$, dan ontstaat er een tautologie. We kunnen dat direct controleren in onderstaande waarheidstabel voor de op een propositie gebaseerde vorm. $(p \rightarrow q) \longleftrightarrow (pq \longleftrightarrow p)$. In de tabel komt in de vijfde kolom alleen een 1 voor wanneer de getallen in de eerste en vierde kolom van dezelfde regel aan elkaar gelijk aan. (zie hiervoor de definitie van $\longleftrightarrow$ op blz. 80).
In de zesde kolom komt alleen een 1 voor als de overeenkomstige getallen in de derde en vijfde kolom aan elkaar gelijk zijn.

P	Q	$P \rightarrow Q$	PQ	$PQ \leftrightarrow P$	$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (PQ \leftrightarrow P)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1

Geldige en ongeldige redenering

Tautologieën spelen een belangrijke rol bij de deductieve redenering. Een deductieve redenering is opgebouwd uit een reeks beweringen, waarin we zeggen dat als zekere proposities waar zijn, dat daar dan uit volgt, dat een andere propositie ook waar is. Ieder van deze beweringen is zelf een propositie. Wanneer we de proposities daarin vervangen door variabelen, dan is het resultaat een op een propositie gebaseerde vorm. De redenering is logisch en we zeggen dat het argument *geldig* is, alleen, maar dan ook alleen als elk van de op een propositie gebaseerde vormen, die worden verkregen, een tautologie is. Laten we b.v. de redenering nemen van blz. 78. Zoals we daar aantoonden is de structuur van de redenering belichaamd

in de op een propositie gebaseerde vorm, *als p q inhoudt en q houdt r in, dan houdt p ook r in.* Wanneer we het symbool $\rightarrow$ gebruiken voor *inhouden,* kunnen we de bewering korter schrijven in deze vorm: als $p \rightarrow q$ en $q \rightarrow r$, dan $p \rightarrow r$. We kunnen het nog korter maken door $\rightarrow$ te schrijven voor *als . . . dan* en . voor *en.* In zuiver symbolische vorm ziet de bewering er dan zo uit:
$(p \rightarrow q)\ (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$. De waarheidstabel voor deze vorm toont dat het een tautologie is:

P	Q	R	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow R$	$(P \rightarrow Q)(Q \rightarrow R)$	$P \rightarrow R$	$(P \rightarrow Q)(Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Wanneer de vorm van een bewering geen tautologie is, dan is de bewering bedrieglijk en bewijst niet wat zij voorgeeft te bewijzen. Het is niet altijd gemakkelijk een bedrieglijke bewering te herkennen als zij in woorden wordt uitgedrukt. Maar zij kan altijd aan de kaak worden gesteld, wanneer we de waarheidstabel opstellen voor de betreffende op een propositie gebaseerde vorm. Laten we als voorbeeld eens een bewering, die veel in de Verenigde Staten wordt gehoord, analyseren. De bewering luidt als volgt: Als een man een communist is, dan oefent hij critiek uit op de buitenlandse politiek van de regering. Deze man oefent critiek uit op de buitenlandse politiek van de regering. Daarom is hij communist. De op een propositie gebaseerde vorm, waarop deze bewering berust is:
Als $(p \rightarrow q)$ en q, dan p. In symbolen uitgedrukt krijgen we $(p \rightarrow q)$ $q \rightarrow p$. De waarheidstabel voor deze vorm, die hieronder is opgesteld heeft een 0 in de laatste kolom, daardoor is het geen tautologie. Hieruit volgt dat de bewering bedrieglijk is.

P	Q	$P \rightarrow Q$	$(P \rightarrow Q)Q$	$(P \rightarrow Q)\ Q \rightarrow P$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	0	1	0	1

Een andere manier om dezelfde bewering uit te drukken is deze: $p \rightarrow q$ is gelijkwaardig aan $q \rightarrow p$. Men is geneigd dit als een ware bewering te aanvaarden om de oppervlakkige gelijkenis tussen de twee bepalingen. Onderstaande waarheidstabellen tonen echter aan, dat deze vormen niet gelijkwaardig zijn.

P	Q	$P \rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

P	Q	$Q \rightarrow P$
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	1

De vorm $q \rightarrow p$ wordt het omgekeerde genoemd van $p \rightarrow q$. Omdat het omgekeerde van $p \rightarrow q$ er niet gelijkwaardig aan is, zal er een andere op een propositie gebaseerde vorm zijn, die dat wel is. De vorm $(\sim q) \rightarrow (\sim p)$, die bekend staat als het *tegengestelde* van $p \rightarrow q$ is gelijkwaardig met $p \rightarrow q$. Om dit te controleren kunt u bij wijze van oefening de waarheidstabellen daarvoor eens opzetten.

Een vorm voor een waarheidstabel

Een waarheidstabel kan worden opgezet voor iedere willekeurige op een propositie gebaseerde vorm. Het proces kan ook worden omgekeerd. Het is mogelijk voor een willekeurige waarheidstabel een op een propositie gebaseerde vorm te vinden, waarvoor deze waarheidstabel goed is. Er is een eenvoudige methode om deze vorm op te bouwen. De beste manier om de gang van zaken te verklaren is het te laten zien aan de hand van een speciale opgave:

Opgave: Zet een op een propositie gebaseerde vorm op met drie variabelen, waarvoor onderstaande waarheidstabel geldt:

Werkwijze: Om te beginnen stellen we acht vormen op, die elk overeenkomen met een van de lijnen uit de tabel. Elke vorm is het produkt (samenvoeging) van drie factoren. De eerste factor is p of $\sim p$, afhankelijk van het feit of $P = 1$ of 0. De tweede factor is q of $\sim q$, afhankelijk van het feit of $Q = 1$ of 0.

De derde factor is r of $\sim r$, afhankelijk van het feit of $R = 1$ of 0. De vorm die overeenkomt met de eerste regel, is dus *pqr;* de vorm voor de tweede regel is $pq\ (\sim r)$; voor de derde regel $p\ (\sim q)\ r$, enz. We vinden dan de gewenste vorm door de som (scheiding) te bepalen van enkele van deze vormen. We gebruiken alleen die vormen, die overeenkomen met een lijn waarop de waarde 1 in de laatste kolom van de tabel staat. De gezochte vorm voor deze tabel is dan: $pqr + pq\ (\sim r) + p\ (\sim q)\ (\sim r) + (\sim p)\ q\ (\sim r) + (\sim p)\ (\sim q)\ (\sim r)$.

P	Q	R	waarheids-waarde
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

We hebben gezien, dat het mogelijk is dat verschillende vormen dezelfde waarheidstabel hebben. Een gegeven tabel zal dan ook in het algemeen voor verschillende vormen gelden. De werkwijze die wij hierboven hebben besproken, is slechts een daarvan. Echter kunnen ook andere gelijkwaardige vormen worden gevonden door de regels van de algebra van Boole toe te passen. Schrijf eerst de uitdrukking op voor de waarheidswaarde van de vorm. Dat wil zonder meer zeggen schrijf hem nog eens op, maar nu met hoofdletters in plaats van kleine letters. Transformeer deze uitdrukking tot een nieuwe, in overeenstemming met de algebra van Boole. Dan krijgen we de vorm, die bij de nieuwe uitdrukking behoort, door haar zonder meer in kleine letters over te schrijven. Het feitelijke doel van al dit werk is een eenvoudiger vorm te krijgen dan de oorspronkelijke. De waarheidswaarde voor de vorm, die wij zojuist voor de tabel opstelden bij voorbeeld, is $PQP + PQ\ (\sim R) + P\ (\sim Q)\ (\sim R) + (\sim P)\ Q\ (\sim R) + (\sim P)\ (\sim Q)\ (\sim R)$. Volgens de regels van de algebra van Boole komt deze uitdrukking overeen met:

$PQ\,(R + \sim R) + P\,(\sim Q)\,(\sim R) + (\sim P)\,(\sim R)\,(Q + \sim Q)$
Maar $R + \sim R = 1$ en $Q + \sim Q = 1$, zodat de uitdrukking gelijk is aan $PQ \cdot 1 + P\,(\sim Q)\,(\sim R) + (\sim P)\,(\sim R)\,1$, wat weer gelijk is aan: $PQ + P\,(\sim Q)\,(\sim R) + (\sim P)\,(\sim R)$. Hieruit vinden we dan de eenvoudigere op een propositie gebaseerde vorm:
$pq + p\,(\sim q)\,(\sim r) + (\sim p)\,(\sim r)$ als een tweede oplossing van de opgave.
Bij het zoeken naar gelijkwaardige op proposities gebaseerde vormen kunnen we sneller werken door met de op een propositie gebaseerde vormen zelf te werken in plaats van met de uitdrukkingen voor hun waarheidswaarden. Dit is toegestaan, want het betekent alleen dat we de tussentrappen waarin we van kleine letters op hoofdletters overgaan, weglaten en dan weer terug naar kleine letters. Wanneer we deze verkorting toepassen zouden we dus zeggen $p + \sim p = 1$, hoewel letterlijk gesproken de juiste bewering is dat $P + \sim P = 1$.
De techniek van het opbouwen van een op een propositie gebaseerde vorm voor gegeven waarheidstabellen, heeft belangrijke praktische toepassingen. In hoofdstuk XI zullen we in de gelegenheid zijn haar te gebruiken voor het ontwerpen van enkele basisonderdelen voor een elektronische rekenmachine. Ondertussen zullen we haar gebruiken om een bekende logicapuzzel op te lossen.
Puzzel: Een logicus bezocht eens een land, dat door twee stammen werd bewoond: de Heiligen en de Zondaars. De Heiligen en de Zondaars zagen er precies hetzelfde uit, waren hetzelfde gekleed en spraken dezelfde taal, zodat er geen uiterlijke kentekenen waren om ze van elkaar te onderscheiden. Toch verschilden ze echter in één belangrijk opzicht. De Heiligen spraken altijd de waarheid, terwijl de Zondaars altijd logen. Op een keer, toen de logicus een voettocht maakte naar de hoofdstad Metropolis, kwam hij bij een wegsplitsing. Er was geen enkele aanduiding welke van de twee wegen naar de hoofdstad voerde. Er stond echter toevallig juist een inboorling bij de wegsplitsing. De logicus wist natuurlijk niet of het een Heilige of een Zondaar was, dus kon hij niet rekenen op een juist antwoord op door hem gestelde vragen. Niettegenstaande dat stelde hij de inboorling een enkele vraag en bepaalde aan de hand van het antwoord welke weg hij moest inslaan. Welke vraag stelde hij?
De oplossing van deze puzzel kan als volgt worden gevonden. Aangezien er slechts twee wegen waren waaruit de logicus moest kiezen, moest zijn vraag slechts twee antwoorden toelaten. Aan deze eis wordt voldaan als

zijn vraag zo gesteld is, dat er alleen maar *ja* of *nee* op kan worden geantwoord. Hij moet zijn vraag nu zodanig inkleden, dat het antwoord *ja* is als de linker weg naar de stad voert en *nee* als de rechter weg naar de stad voert, of de inboorling nu de waarheid spreekt of niet. Om een dergelijke vraag op te bouwen beginnen we de vaststelling „De linker weg is de weg naar Metropolis" aan te duiden met p en „U bent een Heilige" aan te duiden met q. Nu gaan we een tabel met vier kolommen samenstellen. In de beide eerste kolommen zetten we alle mogelijke combinaties van waarheidswaarden van p en q. In de derde kolom zetten we het antwoord, dat de logicus op zijn vraag wil hebben. Het zal afhangen van de waarheidswaarde van p. Het antwoord drukken we in code uit, door 1 te schrijven voor *ja* en 0 voor *nee*. In de vierde kolom schrijven we op wat in de derde kolom staat op de regels waar $Q = 1$. Op de regels waar $Q = 0$ zetten we in de vierde kolom juist het tegengestelde van dat in de derde kolom. De vierde kolom zal de waarheidswaarden aangeven van een onbekende samengestelde op een propositie gebaseerde vorm.
Hier is de tabel:

P	Q	*gewenste antwoord*	*onbekende vorm*
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	0	0
0	0	0	1

Een op een propositie gebaseerde vorm, die de waarheidswaarden heeft welke in de vierde kolom voorkomen is $pq + (\sim p)\,(\sim q)$. Als de logicus vraagt „Is $pq + (\sim p)\,(\sim q)$ waar? dan zal het antwoord voor elk van de mogelijkheden uit kolom 1 en 2 steeds datgene zijn wat in kolom 3 is aangegeven. De passende vraag, uitgedrukt in woorden is dan: Is het waar dat óf de linker weg voert naar Metropolis en u bent een Heilige, óf de linker weg voert niet naar Metropolis en u bent een Zondaar?

De algebra van Boole in de geneeskunde

We zullen dit hoofdstuk over de algebra van de proposities afsluiten met de beschrijving van een van de interessantste toepassingen daarvan. We zullen laten zien hoe de algebra van Boole kan worden gebruikt voor het stellen van een diagnose.

Als een dokter een patiënt onderzoekt, let hij op zekere symptomen. Zijn waarnemingen nemen de vorm aan van proposities: de patiënt vertoont dit symptoom; hij heeft dat symptoom niet; enz. De dokter heeft ook medische kennis. Deze kennis is een verzameling proposities betreffende het verband tussen ziekten en symptomen. Zijn diagnose is een logische deductie van de twee verzamelingen proposities.

Laten we eens aannemen, dat er twee symptomen zijn s en t, elk van deze symptomen is of aanwezig of ontbreekt. Laten we met s aangeven de propositie: *„de patiënt vertoont symptoom s"*. Dan wil $\sim s$ zeggen: *de patiënt vertoont symptoom s niet*. Verder staat t voor de propositie: *de patiënt vertoont symptoom t*. Dan zal $\sim t$ betekenen: *de patiënt vertoont symptoom t niet*.

Laten we verder veronderstellen, dat er twee ziekten zijn, c en d. We zetten dan c voor: *de patiënt heeft ziekte c* en d voor: *de patiënt heeft ziekte d*. Verder nemen we aan, dat de stand van de medische wetenschap betreffende deze ziekten wordt belichaamd in de volgende proposities.

1. Als de patiënt ziekte d heeft, dan moet hij symptoom s vertonen.
2. Als de patiënt ziekte c heeft en niet ziekte d, dan moet hij symptoom t vertonen.
3. Als de patiënt ziekte d heeft en niet ziekte c, dan kan hij symptoom t niet vertonen.
4. Als de patiënt symptoom s of t of beide vertoont, dan moet hij óf ziekte c óf ziekte d of beide hebben.

Hoe luidt de diagnose als de patiënt symptoom t vertoont en niet symptoom s?

De eerste stap om dit vraagstuk te kunnen oplossen, is de proposities 1 tot 4 in symbolische vorm op te schrijven.

1. $d \rightarrow s$
2. $c\,(\sim d) \rightarrow t$
3. $d\,(\sim c) \rightarrow \sim t$
4. $s + t \rightarrow c + d$

Op blz. 88 hebben we gezegd, dat $p \rightarrow q$ gelijkwaardig is aan $pq \longleftrightarrow p$. We kunnen de vier proposities dus ook als volgt uitdrukken:

1. $ds \longleftrightarrow d$
2. $c\,(\sim d)\,t \longleftrightarrow c\,(\sim d)$
3. $d\,(\sim c)\,(\sim t) \longleftrightarrow d\,(\sim c)$
4. $(s + t)\,(c + d) \longleftrightarrow (s + t)$.

Gelijkwaardige proposities hebben gelijke waarheidswaarden. De laatste vier proposities voeren dus tot onderstaande vergelijkingen betreffende de waarheidswaarden.

I. $DS = D$
II. $C (\sim D) T = C (\sim D)$
III. $D (\sim C) (\sim T) = D (\sim C)$
IV. $(S + T) (C + D) = S + T$

Van nu af aan werken we alleen met waarheidswaarden. Vermenigvuldiging van vergelijking I met $\sim S$ levert op $DS (\sim S) = D (\sim S)$. Maar $S (\sim S) = 0$. Zodat $D (\sim S) = 0$. Op overeenkomstige wijze leert vergelijking II op $C (\sim D) (\sim T) = 0$ en van vergelijking III krijgen we $D (\sim C) T = 0$. Vergelijking IV gaat over in $(S + T) [\sim (C + D)] = 0$. Wij weten, dat $S + \sim S = 1$ en $T + \sim T = 1$. Vermenigvuldigen we deze twee vergelijkingen, dan krijgen we $(S + \sim S) (T + \sim T) = 1$. De linker helft uitgewerkt levert op: $ST + S (\sim T) + (\sim S) T + (\sim S) (\sim T) = 1$. Evenzo van $C + \sim C = 1$ en $D + \sim D = 1$ krijgen we $CD + C (\sim D) + (\sim C) D + (\sim C) (\sim D) = 1$. Vermenigvuldiging van de twee uitgewerkte vergelijkingen levert op:

$[ST + S (\sim T) + (\sim S) T + (\sim S) (\sim T)] . [CD + C (\sim D) + (\sim C) D + (\sim C) (\sim D)] = 1.$

Deze vergelijking uitgewerkt wordt:

$STCD + STC (\sim D) + ST (\sim C) D + ST (\sim C) (\sim D) + S (\sim T) CD + S (\sim T) C (\sim D) + S (\sim T) (\sim C) D + S (\sim T) (\sim C) (\sim D) + (\sim S) TCD + (\sim S) TC (\sim D) + (\sim S) T (\sim C) D + (\sim S) T (\sim C) (\sim D) + (\sim S) (\sim T) CD + (\sim S) (\sim T) C (\sim D) + (\sim S) (\sim T) (\sim C) D + (\sim S) (\sim T) (\sim C) (\sim D) = 1.$

Aangezien $D (\sim S) = 0$ zullen de 9e, 11e, 13e en 15e term van de linkerzijde gelijk 0 zijn. Aangezien $C (\sim D) (\sim T) = 0$ zijn de 6e en 14e term gelijk aan nul en aangezien $D (\sim C) T = 0$, is de derde term gelijk aan nul. Al deze termen verdwijnen dus uit de vergelijking. Er blijft dan over:

$STCD + STC (\sim D) + ST (\sim C) (\sim D) + S (\sim T) CD + S (\sim T) (\sim C) D + S (\sim T) (\sim C (\sim D) + (\sim S) TC (\sim D) + (\sim S) T (\sim C) (\sim D) + (\sim S) (\sim T) (\sim C) (\sim D) = 1.$

Deze vergelijking kunnen we nog verder vereenvoudigen door gebruik te maken van de vergelijking $(S + T)\ [\sim (C + D)\ ] = 0$, die we hadden afgeleid van IV. Volgens de dualiteitswet is $\sim (C + D) = (\sim C)\ (\sim D)$. Zodat $(S + T)\ (\sim C)\ (\sim D) = 0$. Hieruit volgt $S\ (\sim C)\ (\sim D) + T\ (\sim C)\ (\sim D) = 0$.
De tabel voor de optelling van de tweewaardige algebra van Boole laat zien, dat de som van twee termen alleen maar 0 is, als elk van de twee termen 0 is. Daarom is $S\ (\sim C)\ (\sim D) = 0$ en $T\ (\sim C)\ (\sim D) = 0$. Nu kunnen er weer drie termen uit de vergelijking wegvallen. We krijgen

$$STCD + STC\ (\sim D) + S\ (\sim T)\ CD + S\ (\sim T)\ (\sim C)\ D + (\sim S)\ TC\ (\sim D + (\sim S)\ (\sim T)\ (\sim C)\ (\sim D) = 1.$$

Passen we nu de distributieve eigenschap toe om de termen 1 en 2 en ook de termen 3 en 4 opnieuw op te schrijven, dan krijgen we

$$STC\ (D + \sim D) + S\ (\sim T)\ D\ (C + \sim C) + (\sim S)\ TC\ (\sim D) + (\sim S)\ (\sim T)\ (\sim C)\ (\sim D) = 1.$$

Daar $D + \sim D = 1$ en $C + \sim C = 1$ krijgen we tenslotte:

$$STC + S\ (\sim T)\ D + (\sim S)\ TC\ (\sim D) + (\sim S)\ (\sim T)\ (\sim C)\ (\sim D) = 1.$$

Deze laatste vergelijking vat de stand van de medische wetenschap betreffende het verband tussen de ziekten c en d en de symptomen s en t samen. Laten we deze vergelijking MW noemen.
Als de patiënt symptoom t vertoont, maar niet s, dan is $T = 1$, $\sim T = 0$, $S = 0$ en $\sim S = 1$. Substitueren we dit in vergelijking MW, dan krijgen we

$$0{\cdot}1{\cdot}C + 0{\cdot}0{\cdot}D + 1{\cdot}1{\cdot}C\ (\sim D) + 1{\cdot}0{\cdot}\ (\sim C)\ (\sim D) = 1$$

Dit is te reduceren tot $C\ (\sim D) = 1$. Dit is waar als, maar dan ook alleen als $C = 1$ en $\sim D = 1$. De diagnose is dus: de patiënt heeft ziekte c en niet ziekte d.
Veronderstel, dat de patiënt symptoom s vertoonde en niet t. Hoe luidt dan de diagnose?
Onder deze omstandigheden is $S = 1$, $\sim S = 0$, $T = 0$ en $\sim T = 1$.

Substitueren we dat in vergelijking MW, dan krijgen we:

$$1{\cdot}0{\cdot}C + 1{\cdot}1{\cdot}D + 0{\cdot}0{\cdot}C\ (\sim D) + 0{\cdot}1\ (\sim C)\ (\sim D) = 1.$$

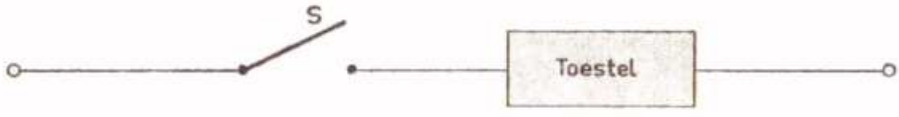
Dit wordt dan $D = 1$. De diagnose luidt dan: de patiënt heeft ziekte d. Deze diagnose is echter niet volledig, want er blijkt niet uit of de patiënt al of niet ook nog ziekte c heeft. De medische wetenschap uitgedrukt in de vergelijking MW is onvoldoende om deze vraag te kunnen beantwoorden.

HOOFDSTUK X

SCHAKELCIRCUITS

Een algebra van schakelaars

In onderstaand schema zien we een elektrisch toestel opgenomen in een leiding, die verbonden is met de klemmen van een elektrisch voedingsapparaat. De schakelaar S is aangebracht om de stroom door het toestel te regelen. Als de schakelaar gesloten is loopt er stroom. Als de schakelaar geopend is, loopt er geen stroom. De twee mogelijke toestanden van een schakelaar, gesloten of open, zijn analoog met de twee waarheidswaarden van een propositie, waar of onwaar. Deze overeenkomst brengt ons er toe symbolen te gebruiken om de toestanden aan te geven. Laten we 1 zetten als de schakelaar gesloten is en 0 voor de open schakelaar.



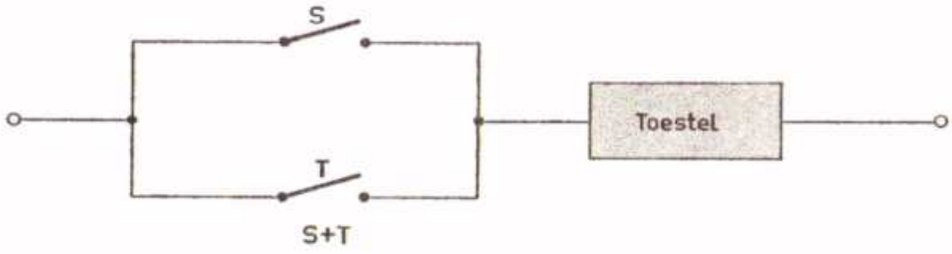
Voeren we de analogie verder door, dan kunnen we bewerkingen met schakelaars invoeren, die overeenkomen met de bewerkingen, die we met proposities kunnen uitvoeren.

1. We kunnen een tweede schakelaar $\bar{S}$ zodanig met schakelaar S koppelen, dat $\bar{S}$ open is als S is gesloten en omgekeerd. Het verband tussen de toestanden van deze schakelaars wordt weergegeven door onderstaande tabel.

Deze tabel komt overeen met de waarheidstabel voor de ontkenning van een op een propositie gebaseerde vorm. We kunnen schakelaar $\bar{S}$ het complement van schakelaar S noemen.

S	$\bar{S}$
1	0
0	1

2. We kunnen de stroom door het toestel regelen door middel van een combinatie van twee parallel geschakelde schakelaars. Wanneer we de schakelaars S en T noemen, dan kunnen we de parallelschakeling met $S + T$ aanduiden. Deze combinatie gedraagt zich als een enkele schakelaar, die open of gesloten kan zijn. Zijn S en T beide gesloten, dan vloeit er stroom door het toestel, dus $S + T$ is gesloten. $S + T$ is ook gesloten

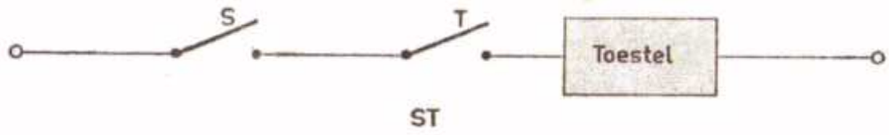


als S gesloten is en T open, of als S open is en T gesloten. Zijn zowel S als T open, dan vloeit er geen stroom door het toestel. In dit geval is $S + T$ open. De wijze waarop de toestand van $S + T$ afhangt van de toestanden van S en T, blijkt uit deze tabel:

S	T	$S + T$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Deze tabel komt overeen met de waarheidstabel voor de scheiding van twee proposities.

3. Twee schakelaars S en T kunnen ook in serie in de stroomkring worden opgenomen. We zullen de serieschakeling aangeven met ST. Ook deze



combinatie gedraagt zich als een enkele schakelaar. *ST* is gesloten als, maar dan ook alleen als *S* en *T* beide zijn gesloten. De wijze waarop de toestand van *ST* afhangt van de toestanden van *S* en *T*, is weergegeven in deze tabel:

S	*T*	*ST*
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Deze tabel is gelijk aan de waarheidstabel voor de samenvoeging van twee proposities.
De drie tabellen laten zien, dat de gelijkenis tussen schakelaars en de waarheidswaarden van proposities niet toevallig is. Schakelaars, met de drie schakelmogelijkheden, die hierboven zijn beschreven, vormen een tweewaardige algebra van Boole. Hieruit volgt, dat schakelkringen met behulp van algebraïsche methoden kunnen worden geanaliseerd. Dit feit werd in 1938 het eerst ontdekt door Claude E. Shannon.

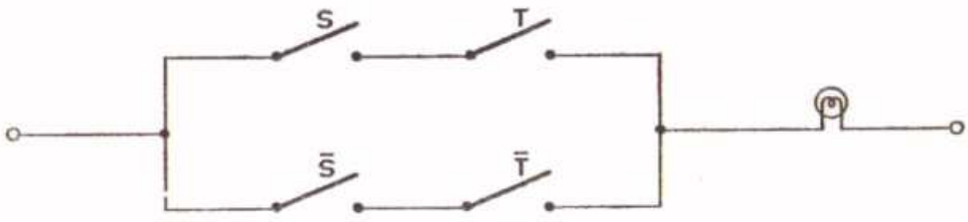
Ontwerpen van een schakeling

Een directe consequentie van de ontdekking van Shannon is, dat het mogelijk is de techniek van de algebra van Boole te gebruiken bij het ontwerpen van schakelcircuits, die aan speciale eisen moeten voldoen.
De gang van zaken is, dat we een „waarheidstabel" opzetten, die de eigenschappen toont, welke we willen dat de schakeling zal hebben. Dan kunnen we op de wijze zoals dat in het laatste hoofdstuk is besproken, een formule opstellen voor de schakeling. In de formule stelt ieder plusteken een parallelverbinding voor en ieder maalteken een serieschakeling en iedere streep boven de naam van de schakelaar geeft aan, dat het complement moet worden bepaald.

Laat ons als voorbeeld eens het volgende normale schakelprobleem oplossen. Een lamp boven een trap moet door twee schakelaars worden bediend. De ene S zit boven aan de trap, de andere T onderaan. Wij willen in staat zijn de lamp aan of uit te draaien met elk van de twee schakelaars. Stel dat X de gewenste schakeling voorstelt. Iedere schakelaar heeft twee standen, die we 1 en 0 noemen. Stel, dat het licht brandt, zodat dus $X = 1$, als beide schakelaars in de stand 1 staan. Het omdraaien van een van beide schakelaars zou het licht uit doen. Dus $X = 0$ als $S = 1$ en $T = 0$ of als $S = 0$ en $T = 1$. Een volgende verandering in de stand van een van de schakelaars zou het licht weer aan doen. Dus $X = 1$ als $S = T = 0$. De waarheidstabel voor X heeft dus de volgende vorm:

S	T	X
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

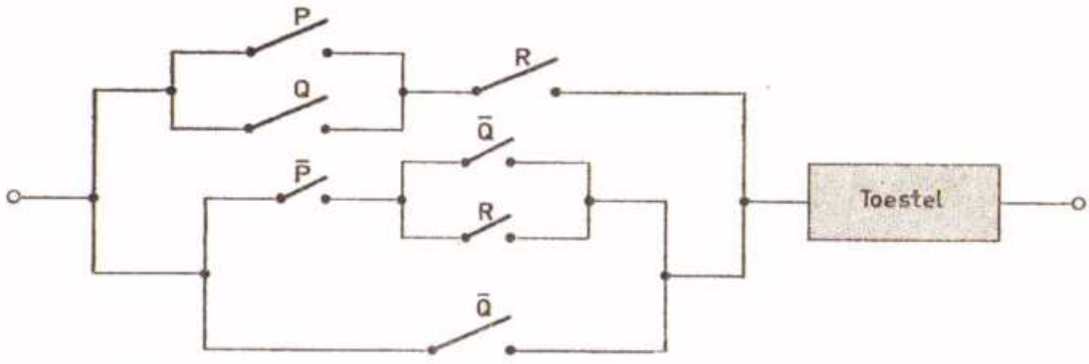
Volgen we de procedure, die op blz. 89 werd beschreven, dan vinden we $X = ST + \bar{S}\bar{T}$. De schakeling, die door deze formule wordt omschreven is dus als volgt:



Het schema toont geen koppeling tussen S en $\bar{S}$ en T en $\bar{T}$. Onderstaand schema laat deze koppeling wel uitkomen.

Het vereenvoudigen van een schakeling

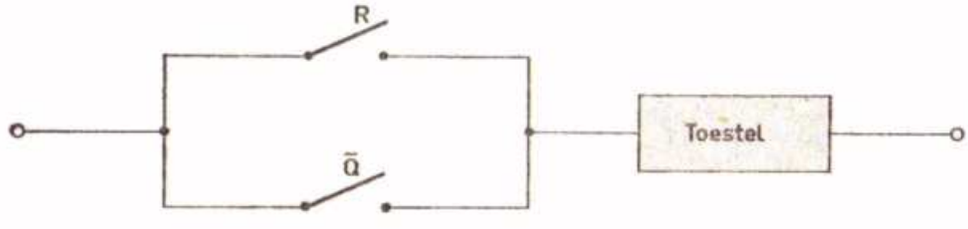
De algebra van Boole is voor de ingenieur een krachtig werktuig om er schakelingen mee te vereenvoudigen. Nadat een schakeling symbolisch door een algebraïsche vorm is voorgesteld, kunnen we de regels voor de algebra van Boole gebruiken om gelijkwaardige uitdrukkingen te zoeken. Elk van deze gelijkwaardige uitdrukkingen stelt een schakeling voor, die de plaats kan innemen van de oorspronkelijke. Als voorbeeld willen we trachten onderstaande schakeling te vereenvoudigen.



De uitdrukking voor deze schakeling is:
$(P + Q)\,R + [\bar{P}\,(\bar{Q} + R) + \bar{Q}]$. Deze uitdrukking kan als volgt worden omgewerkt:

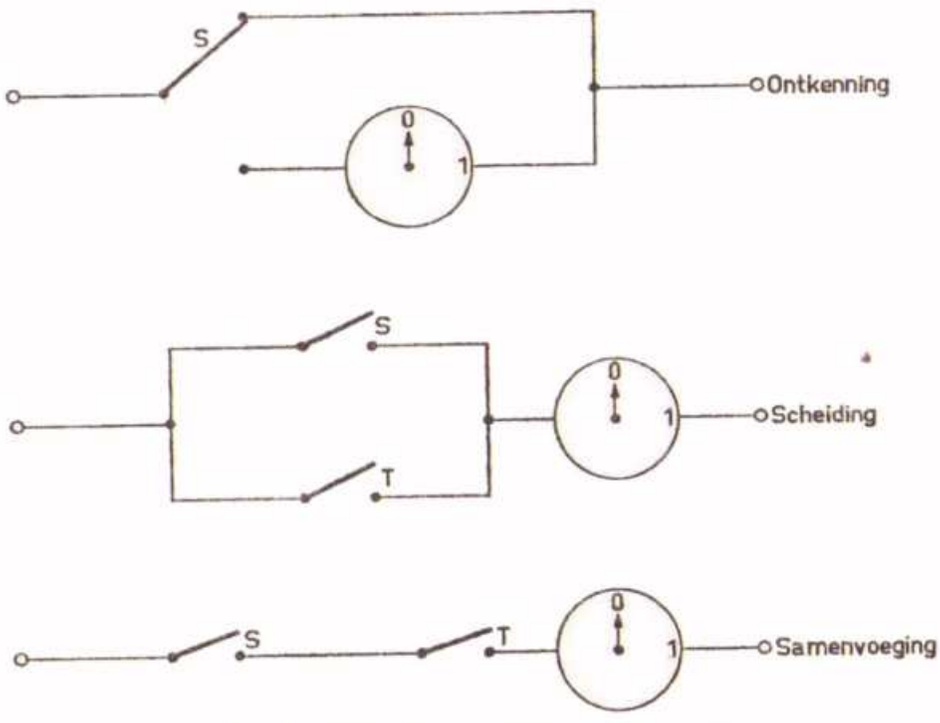
$$\begin{aligned}(P + Q)\,R + [\bar{P}\,(\bar{Q} + R) + \bar{Q}] &= PR + QR + \bar{P}\bar{Q} + \bar{P}R + \bar{Q} \\ &= (PR + \bar{P}R) + QR + \bar{Q} + \bar{P}\bar{Q} \\ &= R\,(P + \bar{P}) + QR + \bar{Q}\,(1 + \bar{P}) \\ &= R{\cdot}1 + QR + \bar{Q}{\cdot}1 \\ &= R\,(1 + Q) + \bar{Q} \\ &= R{\cdot}1 + \bar{Q} = R + \bar{Q}\end{aligned}$$

Bij het uitvoeren van deze omwerking hebben we zekere regels en eigenschappen toegepast, zoals de distributieve eigenschap, de associatieve eigenschappen, de commutatieve eigenschappen en de Wet van 1, die zowel voor de algebra van Boole als voor de algebra met getallen gelden. Maar we gebruikten ook enkele speciale regels van de algebra van Boole, b.v. $X + \bar{X} = 1$ en $1 + X = 1$. Het resultaat van deze algebraïsche berekening laat zien, dat de oorspronkelijke schakeling kan worden vervangen door de veel eenvoudiger schakeling, die hieronder staat afgedrukt.



Schakelingen en logica

Schakel-circuits en proposities hebben dezelfde algebra. Het is de tweewaardige algebra van Boole. Dank zij dit feit kunnen aan iedere uitdrukking in de algebra twee verschillende uitleggingen worden gegeven. Zij kan worden uitgelegd als een samengestelde schakelaar, die is opgebouwd uit eenvoudige schakelaars of zij kan worden uitgelegd als een samengestelde propositie, die is opgebouwd uit elementaire proposities. Zo vertegenwoordigt b.v. de uitdrukking *st* zowel de samenvoeging van twee proposities *s* en *t* als een serieschakeling van twee schakelaars *s* en *t*. Wegens de dubbele interpretatie die mogelijk is, drukken de algebraïsche uitdrukkingen een verband uit tussen de onderdelen van schakelcircuits en de onderdelen van het systeem van de op een propositie gebaseerde vormen. We hebben dit verband in een richting gebruikt door symbolische logica te gebruiken voor het oplossen van schakelproblemen. We kunnen deze ook in tegengestelde richting gebruiken door schakelingen toe te passen voor het oplossen van problemen van de logica. De waarheidstabel van een samengestelde op een propositie gebaseerde vorm bij voorbeeld, kan worden voorgesteld door een schakelcircuit. Wanneer we een meter gebruiken als het in de kring opgenomen toestel, dan zal deze automatisch



Schakelingen voor waarheidstabellen

de waarheidswaarde aangeven van de vorm voor iedere keuze van de waarheidswaarden voor de daarin voorkomende variabelen. Om aan te tonen, dat een variabele *s* de waarheidswaarde 1 heeft behoeven we alleen maar de overeenkomstige schakelaar *s* te sluiten. Om te laten zien, dat de variabele *s* de waarheidswaarde 0 heeft gekregen, laten we schakelaar *s* open. De waarheidswaarde van de samengestelde propositie zal 1 zijn als, maar dan ook alleen als de meter stroomdoorgang aanwijst. De schakelingen, die nodig zijn voor ontkenning, scheiding en samenvoeging zijn direct voor de hand liggend en zijn in onderstaande schema's gegeven. Maar wanneer schakelcircuits problemen van de logica kunnen oplossen, dan wil dat zeggen, dat wij ze kunnen gebruiken om een deel van ons denken over te nemen. Dit is de reden, waarom schakelcircuits, of hun elektronische equivalenten, de materialen zijn waaruit de bedieningssystemen van de denkende machines worden opgebouwd.

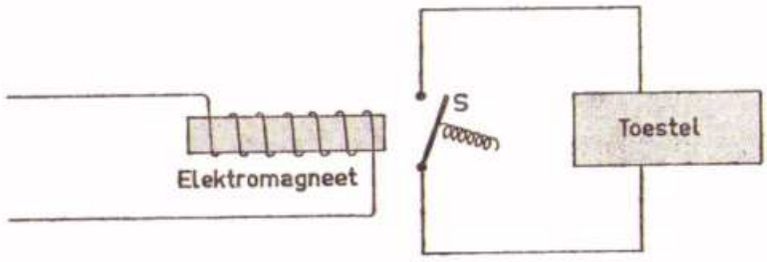
HOOFDSTUK XI

ELEKTRONISCHE REKENMACHINES

Poorten

Een *schakelaar* is een elektrische poort, die is geplaatst in de weg van een elektrische stroom. Als de schakelaar gesloten is, is de poort open en de stroom kan er doorheen vloeien. Als de schakelaar open is, is de poort gesloten en de stroom wordt tegengehouden. De parallel- en serie combinaties van schakelaars, die in het vorige hoofdstuk werden beschreven zijn poorten van een speciaal soort. Twee schakelaars, die parallel zijn geschakeld vormen een *of*-poort omdat zij de stroom alleen maar toestaat te vloeien als de ene *of* de andere schakelaar gesloten is. Twee schakelaars in serie vormen samen een *en*-poort, want zij laten alleen stroom door als de ene *en* de andere schakelaar gesloten is.
We hebben over het openen en sluiten van schakelaars gesproken zonder er rekening mee te houden hoe ze worden geopend en gesloten. Een van de methoden om schakelaars te openen en te sluiten is ze elektrisch te bedienen in een apparaat, dat *relais* wordt genoemd. In een relais is de bewegende arm van een schakelaar aangebracht vlak bij de ijzerkern van een elektromagneet. Als er een stroom door de spoel van de elektromagneet vloeit, wordt de kern gemagnetiseerd, waardoor de schakelaararm wordt aangetrokken en de schakelaar gesloten. Houdt de stroom op te vloeien dan is de kern geen magneet meer. De arm van de schakelaar wordt dan losgelaten en teruggetrokken door een veer, waardoor de schakelaar weer wordt geopend. Bij een relais wordt dus de stroom in de ene stroomkring gebruikt om de stroom in een andere stroomkring te besturen. We willen de stroom in de elektromagneet de *ingang* en de stroom in de leiding, waarin de schakelaar is opgenomen, de *uitgang* noemen. Als er een stroom vloeit duiden we dat aan met 1 en het ontbreken van een stroom met 0. Het gedrag van een enkele relaisschakelaar kunnen we nu als volgt omschrijven. Als de ingang 1 is, is ook de uitgang 1, terwijl als de ingang 0 is ook de uitgang 0 is. Als twee schakelaars A en B worden bediend door relais en parallel zijn geschakeld om een *of*-poort te vormen,

dan kan het gedrag van die *of*-poort als volgt worden omschreven: Als de ingang van *A of B* 1 is, dan is de uitgang 1. Anders is de uitgang 0. Hier is een andere methode om dit feit te bevestigen: De *of*-poort veroorzaakt de uitgang door de ingangen op te tellen volgens de regels welke gelden voor de tweewaardige algebra van Boole.

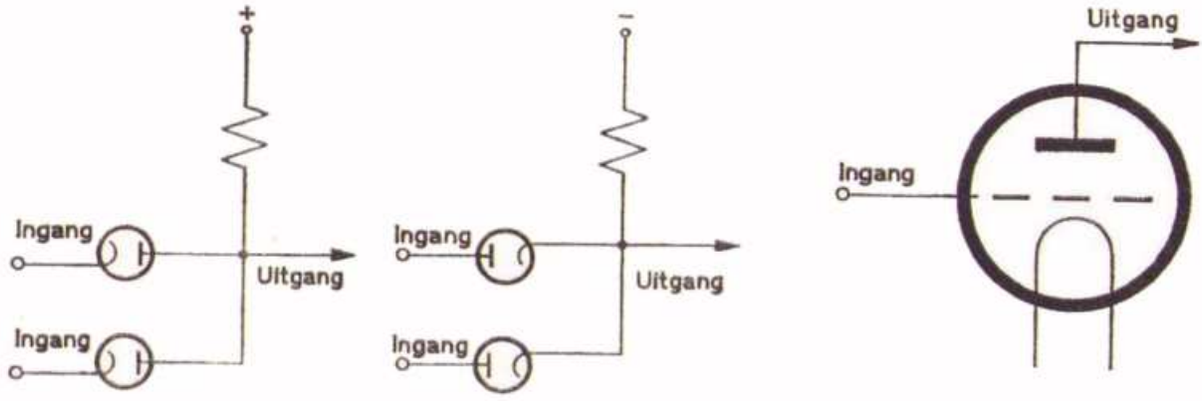


Een relais

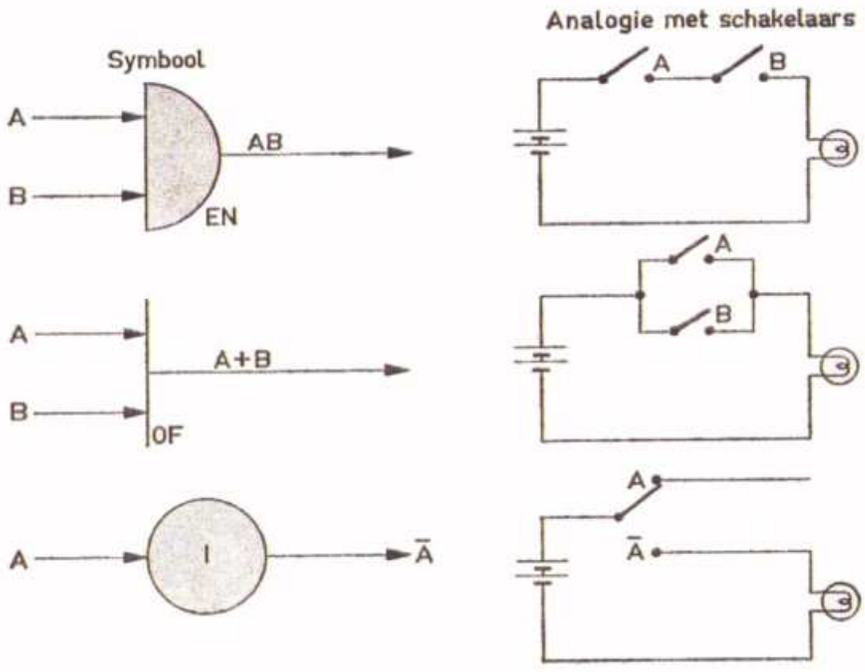
Staan *A* en *B* in serie om een *en*-poort te vormen, dan kan het gedrag van de *en*-poort als volgt worden beschreven: Als de ingang van *A en B* is 1, dan is de uitgang 1. Anders is de uitgang 0. Hier volgt een equivalente formulering van deze bewering. De *en*-poort veroorzaakt de uitgang door de ingangen te vermenigvuldigen overeenkomstig de regels, die gelden voor de tweewaardige algebra van Boole.
Een relais kan ook zodanig worden aangesloten, dat de schakelaar die er door wordt bediend, wordt geopend als de arm door de elektromagneet wordt aangetrokken en gesloten als de arm wordt losgelaten. In dit geval levert een ingang 1 een uitgang 0 op en omgekeerd. Een relais, dat op deze wijze werkt noemen we een *omkeerder*. Het gedrag van een *omkeerder* kan eveneens worden omschreven in de taal van de algebra van Boole: De uitgang van een *omkeerder* is het *complement* van de ingang.
De *of-poort,* de *en-poort* en de *omkeerder* zijn het elektrische parallel van de vereniging, doorsnijding en het complement van groepen en van scheiding, vereniging en ontkenning van proposities. Zij zijn de metalen belichaming van de logische begrippen uitgedrukt door de woorden *of, en* en *niet*. Wanneer met deze kleppen de grondbewerkingen optellen, vermenigvuldigen en het bepalen van het complement worden geleverd, worden stromen de elementen van een algebra van Boole.

Elektronische poorten

Er zijn elektronische eenheden, die vervaardigd zijn uit combinaties van buizen, weerstanden enz., die dezelfde functies verrichten als de door



relais bediende poorten. Ook zij zullen worden aangeduid met de namen *of-poort, en-poort* en *omkeerder*. Een vereenvoudigd schakelschema van elk van deze eenheden staat hieronder afgedrukt. Wij zullen niet vertellen hoe ze werken omdat een dergelijke bespreking elektronische details zou inhouden, die buiten het bestek van dit boek vallen. We zijn er echter wel in geïnteresseerd hoe zij worden gebruikt. Ons eerste doel in dit hoofdstuk is na te gaan op welke wijze daarvoor geschikte combinaties uit deze eenheden in elkaar kunnen worden gezet, zodanig, dat zij een elektronische rekenmachine vormen, die in staat is dingen te doen als optellen en vermenigvuldigen van getallen.



In schema's van een elektronische rekenmachine wordt een speciaal symbool gebruikt voor elk van deze drie eenheden. Deze symbolen zijn hieronder aangegeven links van de schakelschema's van de overeenkomstige schakelcircuits. (Ter wille van de duidelijkheid zijn in de schema's de elektromagneten, die de verschillende schakelaars bedienen, weggelaten). De *en-poort* en de *of-poort* hebben beide twee ingangen en een uitgang. Gebruiken we de notatie van de algebra van Boole, dan krijgen we: als A en B de ingangen zijn, dan is de uitgang van de *en-poort* AB en de uitgang van de *of-poort* $A + B$. De omkeerder heeft een ingang A en de uitgang is $\bar{A}$.

Getallen, die door stromen worden geschreven

De stroom in een geleider kan of *aan* of *uit* staan. Deze tweewaardige natuur van de toestanden van de stroom maakt het mogelijk hen te gebruiken voor het aangeven van een bit in een binair getal. Wanneer we een afzonderlijke geleider gebruiken voor iedere bit, dan kan het gehele getal worden uitgedrukt in de toestanden van de stromen daarin. Veronderstel bij voorbeeld, dat we vier geleiders naast elkaar hebben, waarin van links naar rechts gerekend de toestanden van de stromen in deze draden zijn: aan — uit — aan — uit. Dan vertegenwoordigen deze toestanden het binaire getal 1010, dat overeenkomt met de waarde *tien*.
Gebruiken we decimale getallen, dan noemen we de plaats van de eerste digit rechts de kolom van de *eenheden*. De tweede digit staat in de kolom van de *tientallen,* de derde digit staat in de kolom van de honderdtallen en zo voort. Op overeenkomstige wijze zullen we de plaatsen van rechts naar links bij een binair getal aanduiden als de kolom van de *eenheden,* de kolom van de *tweeën,* de kolom van de *vieren* enz.

Het ontwerpen van een elektronische optelmachine

We zijn nu zo ver, dat we ons kunnen gaan bezighouden met het probleem van het ontwerpen van een elektronische schakeling, die in staat is optellingen van getallen uit te voeren. Laten we beginnen met eens de handeling te bestuderen van iemand, die twee getallen optelt, die binair zijn opgeschreven. Eerst schrijft hij de getallen precies onder elkaar. Dan telt

hij de kolommen op, stuk voor stuk, te beginnen met de kolom van de eenheden. De optelling van de eenhedenkolom verschilt belangrijk van de optelling van iedere andere kolom. In de eenhedenkolom zijn er slechts *twee* bits, die moeten worden opgeteld. In iedere andere kolom moeten er *drie* bits worden opgeteld. Twee daarvan zijn bits, die voorkomen in de op te tellen getallen in de kolom. De derde bit is het te *transporteren getal* van de optelling in de kolom rechts daarvan. Dit te transporteren getal kan een 1 of een 0 zijn (Het is 0 als de som van de opgetelde bits 0 is of 1 en het is 1 als de som 10 of 11 is). Om dus een optelling elektronisch uit te voeren, hebben we twee verschillende apparaten nodig. We hebben er een nodig, dat twee bits kan optellen en dan afzonderlijk de bit kan produceren, die in de som moet worden genoteerd en ook de bit, die moet worden getransporteerd. Een dergelijk apparaat wordt genoemd een *halve opteller.*
We hebben ook een apparaat nodig, dat *drie* bits kan optellen en afzonderlijk de bits kan produceren voor de som en het transport. Dit apparaat heet een *hele opteller.* Een halve opteller is voldoende voor het optellen van de bits in de kolom van de eenheden. Een hele opteller zal nodig zijn voor elk van de andere kolommen.

De halve opteller

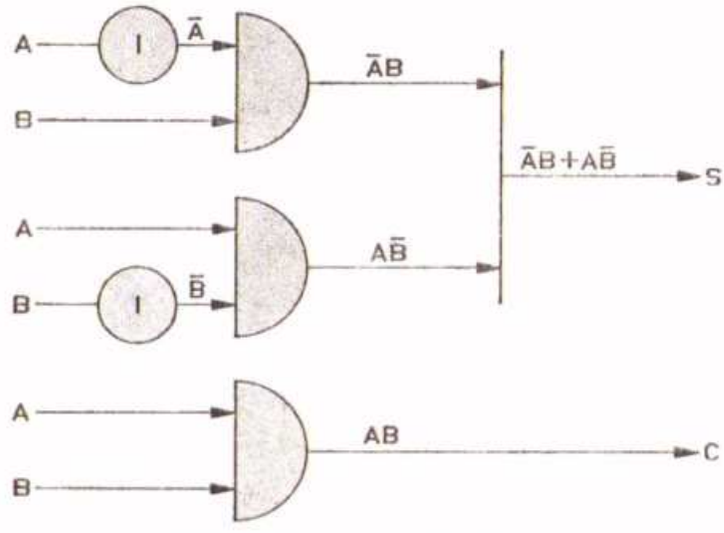
Een halve opteller heeft twee ingangen. Dit zijn de bits in de eenhedenkolom van de op te tellen getallen. We zullen deze bits A en B noemen. De halve opteller heeft ook twee uitgangen: de bit, die in de som komt en de bit, die wordt getransporteerd. We zullen ze respectievelijk S en C noemen. De waarden van S en C voor verschillende waarden van A en B zijn in onderstaande tabel opgenomen.

A	B	S	C
1	1	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

Wat we hier feitelijk hebben opgeschreven is de waarheidstabel voor S en C. Passen we de procedure toe, zoals die op blz. 89 is beschreven, dan kunnen we uit deze waarheidstabellen een formule opstellen voor S en een formule voor C.

$$S = \bar{A}B + A\bar{B} \qquad\qquad C = AB$$

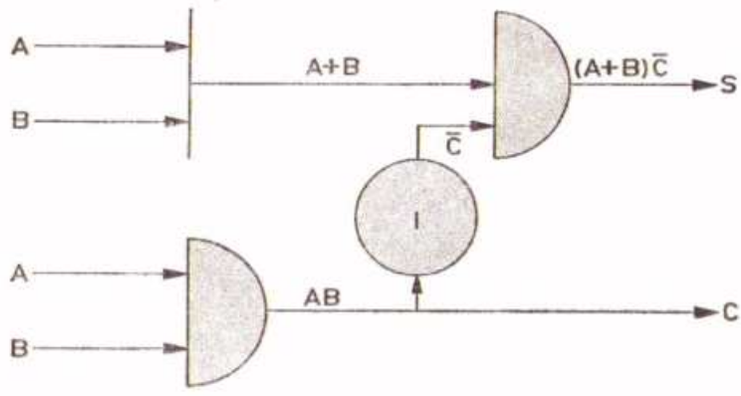
Deze formules geven ons aanwijzingen voor het opzetten van een schakeling, die als halve opteller zal werken. Iedere streep boven de letters in de formules wijst op het gebruik van een omkeerder. Ieder maalteken wijst op het gebruik van een *en*-poort. Ieder plusteken wijst op het gebruik van een *of*-poort. Om de uitgang S te produceren, gaan we als volgt te werk: gebruik een omkeerder om A in $\bar{A}$ te veranderen. Gebruik een omkeerder om B in $\bar{B}$ te veranderen. Gebruik een *en*-poort om $\bar{A}$ met B te vermenigvuldigen, waardoor het produkt $\bar{A}B$ ontstaat. Gebruik een *en*-poort om A met $\bar{B}$ te vermenigvuldigen, waardoor het produkt $A\bar{B}$ wordt verkregen. Gebruik dan een *of*-poort om $\bar{A}B$ en $A\bar{B}$ op te tellen, waardoor S wordt geproduceerd. Om de uitgang C te produceren, hebben we alleen maar een *en*-poort nodig voor de vermenigvuldiging van A en B. De schakeling voor de halve opteller ziet er dan uit als in onderstaand schema.



Schema voor de halve opteller

De formules voor S en C, zoals die hierboven zijn gegeven, zijn niet de enige die voldoen aan de waarheidstabellen voor S en C. Er zijn ook nog andere, die we kunnen vinden door deze formules om te werken volgens de regels van de algebra van Boole. Elk stel formules, dat we op die manier verkrijgen bepaalt de opzet van een schakeling, die het werk van

een halve opteller kan doen. Bijvoorbeeld: Op blz. 71 toonden we aan, dat de uitdrukking $\bar{A}B + A\bar{B}$ gelijkwaardig is aan $(A + B)\bar{C}$. Een andere formule voor S is dus $S = (A + B)\,\bar{C}$. Deze formule levert een andere schakeling op om S te produceren. In deze schakeling wordt een omkeerder gebruikt om $\bar{C}$ uit C af te leiden. Een *of*-poort wordt gebruikt om A en B op te tellen en dan wordt er een *en*-poort gebruikt om $A + B$ met $\bar{C}$ te vermenigvuldigen. Het schema wordt dan als hieronder is weergegeven.



Vereenvoudigd schema voor de halve opteller

In het eerste schema voor de halve opteller gebruikten we twee omkeerders, drie *en*-poorten en een *of*-poort. In het tweede schema zitten slechts een omkeerder, twee *en*-poorten en een *of*-poort. De tweede schakeling is dus goedkoper uit te voeren dan de eerste. Dit toont aan, dat de algebra van Boole een geldswaarde vertegenwoordigt voor de bouwers van elektronische rekenmachines. Door het toepassen van de algebra van Boole kunnen zij soms een schakeling vervangen door een, die eenvoudiger en goedkoper is en toch hetzelfde werk kan doen.

De hele opteller

Een hele opteller heeft drie ingangen. Twee daarvan zijn de bits, die voorkomen in de kolom, die moet worden opgeteld. Laten we ze A en B noemen. De derde is de te transporteren bit van de optelling van de kolom rechts daarvan. We willen deze bit C noemen. De hele opteller heeft twee uitgangen, de bit, die in de som voorkomt en de bit, die wordt getransporteerd. Die noemen we respectievelijk S en D. De waarden voor S en D bij verschillende waarden van A, B en C blijken uit onderstaande tabel.

A	B	C	S	D
1	1	1	1	1
1	1	0	0	1
1	0	1	0	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0
0	0	0	0	0

Met behulp van deze tabel kunnen we volgens de op blz. 89 behandelde

$$S = ABC + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C \text{ en}$$
$$D = ABC + AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC$$

Met behulp van de regels van de algebra van Boole werken we deze formules als volgt om:

$$\begin{aligned} S &= ABC + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C \\ &= (ABC + A\bar{B}\bar{C}) + (\bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C) \\ &= (AB + A\bar{B})\,C + (\bar{A}B + \bar{A}\bar{B})\,\bar{C} \end{aligned}$$

Op blz. 71 hebben we gezien, dat $AB + \bar{A}\bar{B} = \overline{\bar{A}B + A\bar{B}}$. Substitueren we deze laatste uitdrukking voor $AB + \bar{A}\bar{B}$ dan krijgen we:

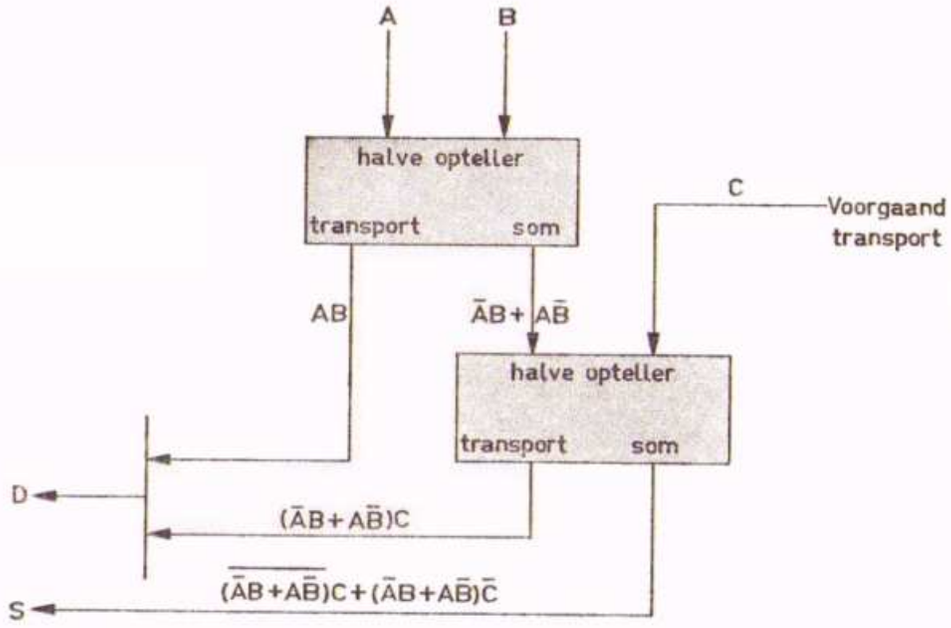
$$S = (\overline{\bar{A}B + A\bar{B}})\,C + (\bar{A}B + A\bar{B})\,\bar{C}$$

Deze formule ziet er wel uit als een meer gecompliceerde uitdrukking voor S, maar heeft toch een groot voordeel in vergelijking met de vorige. S wordt hier uitgedrukt in termen van $\bar{A}B + A\bar{B}$ en C. De eerste is de *som*-uitgang van een halve opteller, die op A en B werkt, terwijl de laatste de *transport*-uitgang is van de optelling van de voorgaande kolom. Deze vorm van de formule maakt het mogelijk een halve opteller als eenheid te gebruiken in de schakeling van een hele opteller.

$$\begin{aligned} D &= ABC + AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC \\ &= (\bar{A}BC + A\bar{B}C) + (ABC + AB\bar{C}) \\ &= (\bar{A}B + A\bar{B})\,C + AB\,(C + \bar{C}) \\ &= (\bar{A}B + A\bar{B})\,C + AB\,(1) \end{aligned}$$

Dus $D = (\bar{A}B + A\bar{B})\,C + AB$

Deze formule drukt D uit in termen van $\bar{A}B + A\bar{B}$, AB en C. De eerste daarvan is de *som*-uitgang van een halve opteller, die op A en B werkt. De tweede is de *transport*-uitgang van dezelfde halve opteller. De derde is de *transport*-uitgang van de optelling van de voorgaande kolom. We kunnen dus ook een halve opteller gebruiken in dat deel van de schakeling, dat D produceert. Gaan we nu volgens deze formules te werk, dan kunnen we een hele opteller samenstellen uit twee halve optellers. De schakeling daarvoor is hieronder aangegeven.



Een hele opteller samengesteld uit twee halve optellers en een of-poort

De rekenmachine met een hartslag

Net zoals er verschillende mogelijkheden zijn om *en*-poorten, *of*-poorten en *omkeerders* samen te voegen tot een halve opteller, zijn er vele mogelijkheden om halve optellers en hele optellers te combineren tot een rekenmachine. Om een speciaal voorbeeld te geven, zullen we eens enkele details nader bekijken van een speciale machine: de Naval Ordnance Research Calculator (bekend onder de naam NORC), die voor de Amerikaanse Marine werd gebouwd door de International Business Machines Corporation (IBM).

Een speciaal kenmerk van de NORC is, dat zij een „hartslag" heeft. Elektrische impulsen die elektronisch worden opgewekt, geven een regelmatig

ritme door de gehele machine. De impulsen worden opgewekt met een snelheid van een miljoen per seconde. Er zijn andere impulsen, die aan de machine worden toegevoerd om getallen voor te stellen, opdrachten te geven, enz. Wanneer de impulsen van het ene naar het andere deel van de machine worden gevoerd, dan bewegen ze voort in de pas met het ritme van de hartslag.

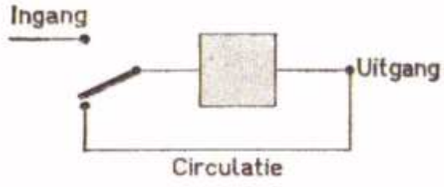
De dynamische impulseenheid (DPU)

Een ander kenmerk van de NORC is de toepassing daarin van een speciaal onderdeel, dat bekend staat als „Dynamic Pulse Unit" of DPU. Een DPU heeft een ingangsklem waarover zij een elektrische impuls kan ontvangen en een uitgangsklem, waarover zij er een kan afgeven. De voornaamste taak van de DPU is een vertraging te veroorzaken van een microseconde (een miljoenste seconde) tussen de binnenkomende impuls en de uitgaande impuls. Wanneer zij de impuls ontvangt op het moment van een hartslag, dan geeft zij er een af op het moment van de volgende hartslag. Verder geeft zij helemaal geen impulsen af. De NORC bevat ongeveer 1500 DPU's.

Symbool van een dynamische impulseenheid

Bij iedere hartslag ontvangt een DPU een signaal via haar ingangsklemmen. Dit signaal is of de aanwezigheid of het ontbreken van een impuls. Bij de volgende hartslag geeft zij dit zelfde signaal door aan de uitgangsklemmen. Er zitten massa's elektronische schakelaars in de NORC. Door het openen en sluiten van deze schakelaars in verschillende combinaties worden verschillende wegen opengesteld waarlangs het signaal verder kan gaan. Een signaal kan ook gedurende ieder willekeurig aantal microseconden worden opgeborgen in een DPU. Om een signaal op te bergen in een DPU wordt het aan de ingangsklem van de DPU toegevoerd op het moment van een hartslag. Dan wordt onmiddellijk de uitgangsklem van de DPU verbonden met de ingangsklem van dezelfde DPU. Als de DPU het signaal bij de volgende hartslag dan afgeeft over de uitgangsklem, dan geeft zij de impuls weer aan zichzelf terug. Op deze wijze wordt de

impuls telkens iedere microseconde vernieuwd, net zo lang tot het aan een ander onderdeel wordt doorgegeven. Een DPU, waarvan de uitgang verbonden is met haar ingang, verkeert zoals men dat noemt in *rondlopende* toestand.



Tijdelijke opslag in een DPU

Getallen in de NORC

Voor het schrijven van getallen gebruikt de NORC het compromis-systeem, dat op blz. 41 is beschreven. Het drukt getallen uit in termen van decimale digits, maar iedere digit wordt voorgesteld door vier bits. De vier bits voor een digit worden uitgedrukt in de vorm van signalen langs vier gescheiden leiders. Een getal bestaande uit dertien digits zou 52 bits nodig hebben om het weer te geven. Deze worden nog vergezeld van 12 andere bits, die het volgende doel hebben: 8 bits, die twee digits voorstellen geven de plaats aan van de komma in het getal; 4 bits, die een digit voorstellen geven het algebraïsche teken aan. Er zijn dus 64 bits, die tezamen het getal voorstellen. Nog twee extra bits worden voor controledoeleinden gebruikt. Het totaal van 66 bits omvat nu wat we noemen een *getalwoord*. De plaats van de komma wordt met behulp van een eenvoudige code aangegeven. De digit 0 betekent in deze code, dat de komma op de normale plaats staat, dat is rechts van de eerste digit van het getal. Een codegetal van 1 tot en met 30 geeft aan, dat de komma evenveel plaatsen rechts staat van de normale plaats. Zo betekent b.v. het codegetal 5 dat de komma vijf plaatsen rechts van de normale plaats staat. Een codegetal van 70 tot en met 99 geeft aan, dat de komma links staat van de normale plaats. Om er achter te komen hoeveel plaatsen naar links dat is moet u het codegetal aftrekken van 100. Het codegetal 97 bijvoorbeeld geeft aan dat de komma drie plaatsen links van de normale plaats staat.
Om het algebraïsche teken van het getal aan te geven, wordt gebruik ge-

maakt van de digits 0 en 1. De digit 0 geeft aan, dat het getal positief is, de digit 1 betekent dat het getal negatief is. Wanneer een getal wordt geschreven, dan wordt het codegetal voor het teken links van de digits voor het getal geschreven. Het codegetal voor de plaats van de komma wordt weer links geplaatst van het codegetal voor het teken. Volgens deze opzet geeft dus de reeks
08/0/567 123 806 542 9 het getal + 567 123 806, 5429 aan.

Het NORC geheugen

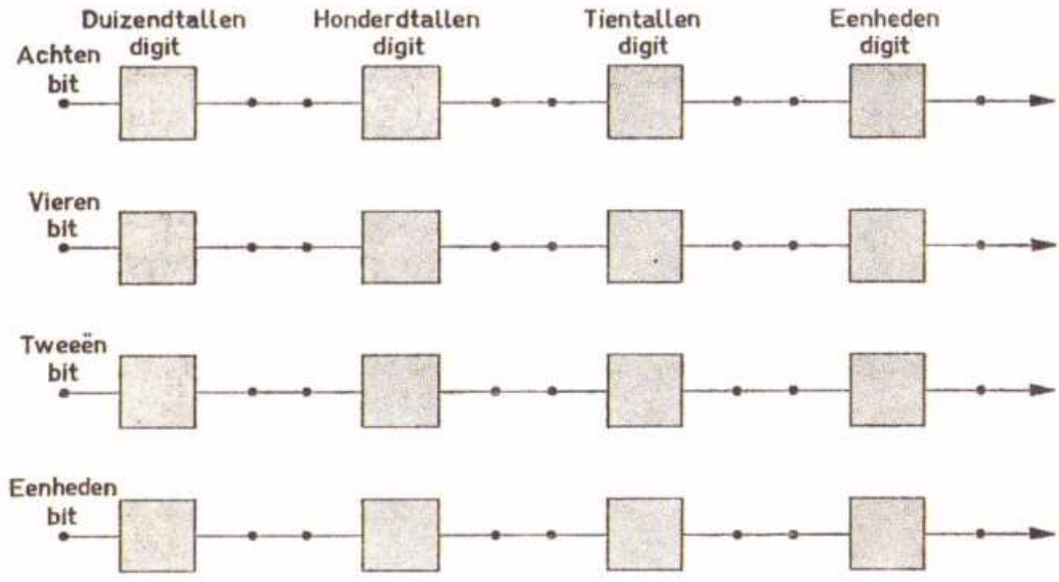
Het geheugen of opslageenheid van de NORG bestaat uit een stel buizen zoiets als de beeldbuizen van een televisietoestel. De voorzijde van iedere buis is gedacht te zijn verdeeld in kleine vierkantjes. Elk vierkantje is een *locatie.* Een enkele bit kan in iedere locatie worden opgeborgen. Dat wordt gedaan door het elektronenkanon van de buis te richten op deze locatie of op een punt dicht daarbij. Het elektronenkanon zendt een elektronenstraal uit. Wanneer deze straal de locatie treft, dan worden daar ter plaatse elektronen uit het glas losgeslagen. Elektronica-ingenieurs noemen dat een *„gat graven".* Wanneer de elektronenstraal een punt treft in de nabijheid van de locatie, waarin een „gat is gegraven", dan worden de ontbrekende elektronen weer aangevuld. Dit heet het *gat opvullen.* De stroom wordt gedwongen een *gat te graven,* wanneer een 0 moet worden opgeslagen en wordt gedwongen een *gat op te vullen,* wanneer een 1 moet worden opgeslagen.
Aan de buitenzijde van iedere geheugenbuis is dicht bij de voorkant een geleidend oppervlak aangebracht. Dit oppervlak wordt gebruikt om de bits af te lezen, die in de buis zijn opgeslagen. Om een bit, die in een locatie is opgeslagen af te lezen, wordt de elektronenstraal daarop gericht. Als de bit een 1 is, dan is er geen gat op die locatie. De stroom graaft er dus een gat. Dit graven veroorzaakt een stroomimpuls in een draad, die met het geleidende oppervlak is verbonden. Op deze wijze wordt een 1, die was opgeslagen, gelezen als een impuls in die draad. Als de in die locatie opgeslagen bit een 0 is, dan is er een gat in. Dan „graaft" de elektronenstroom daar dus niet, omdat er al een gat gegraven is. Het resultaat is, dat er geen impuls optreedt in de draad verbonden met het geleidend oppervlak. Op deze wijze wordt een 0, die opgeslagen is in de locatie afgelezen door het ontbreken van een impuls in de draad.

Een getal uit de voorraad halen

De 64 bits die een getal voorstellen kunnen worden opgeslagen in 64 locaties in de geheugeneenheid. Deze combinatie van bit-locaties is een *woordlocatie*. Om een getal uit de voorraad te halen wordt de draad van iedere bit-locatie met de ingangsklem van een afzonderlijke DPU verbonden. Bij de volgende hartslag treedt iedere bit een DPU binnen. Dan worden de bits omgeschakeld op *rondlopen*. Het getal is nu, tot het nodig is, opgeslagen in de groep van 64 DPU's. Deze groep DPU's, die tezamen als een eenheid worden gebruikt heet een *register*.
Wanneer twee getallen bij elkaar moeten worden opgeteld, worden ze elk eerst in een register opgeslagen. Dan worden de getallen van de twee registers toegevoerd aan de opteleenheid. In het onderstaande zullen we komma's en algebraïsche tekens negeren en ons alleen bezighouden met de optelling van natuurlijke getallen.

Verplaatsen van een getal

Wanneer een getal opgeslagen is in een register, dan kan de machine het getal verplaatsen. Om het te verplaatsen zet de machine eerst de digits van een getal op een rij. Dat gebeurt door de DPU's zodanig te schakelen, dat zij vier rijen vormen op de wijze zoals in onderstaande tekening is aangegeven. Elke groep van vier DPU's die in een vertikale kolom staan, bevatten de bits die een enkele digit voorstellen. De kolom geheel rechts

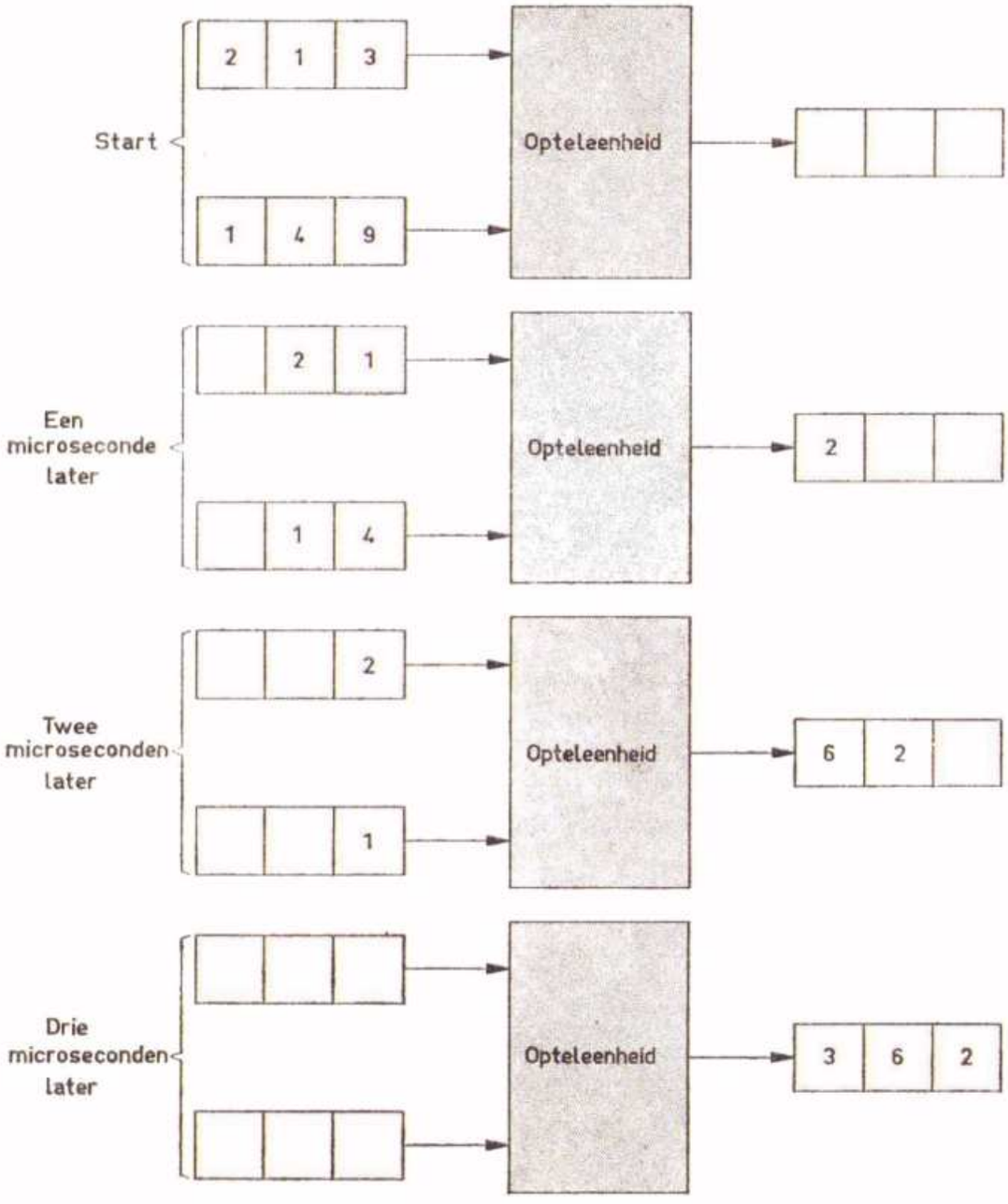


bevat de digit van de eenheden, de volgende kolom bevat de tientallen-digit enz. Met andere woorden, de plaatsing van de digits langs de vier lijnen komt precies overeen met de normale wijze waarop een decimaal getal wordt geschreven.
Veronderstel nu, dat iedere lijn langer wordt gemaakt door er aan de rechter kant meer DPU's aan toe te voegen. Bij de eerste daaropvolgende hartslag geeft iedere DPU zijn bit door aan de rechts daarvan liggende DPU. De vier bits, die een digit voorstellen bewegen dus tegelijkertijd een plaats naar rechts. Bij de volgende hartslag bewegen ze weer een plaats naar rechts. De vier rijen bits marcheren dus als het ware in de pas met het ritme van de hartslag als een kolonne soldaten tijdens een parade naar rechts.

Hoe de NORC getallen optelt

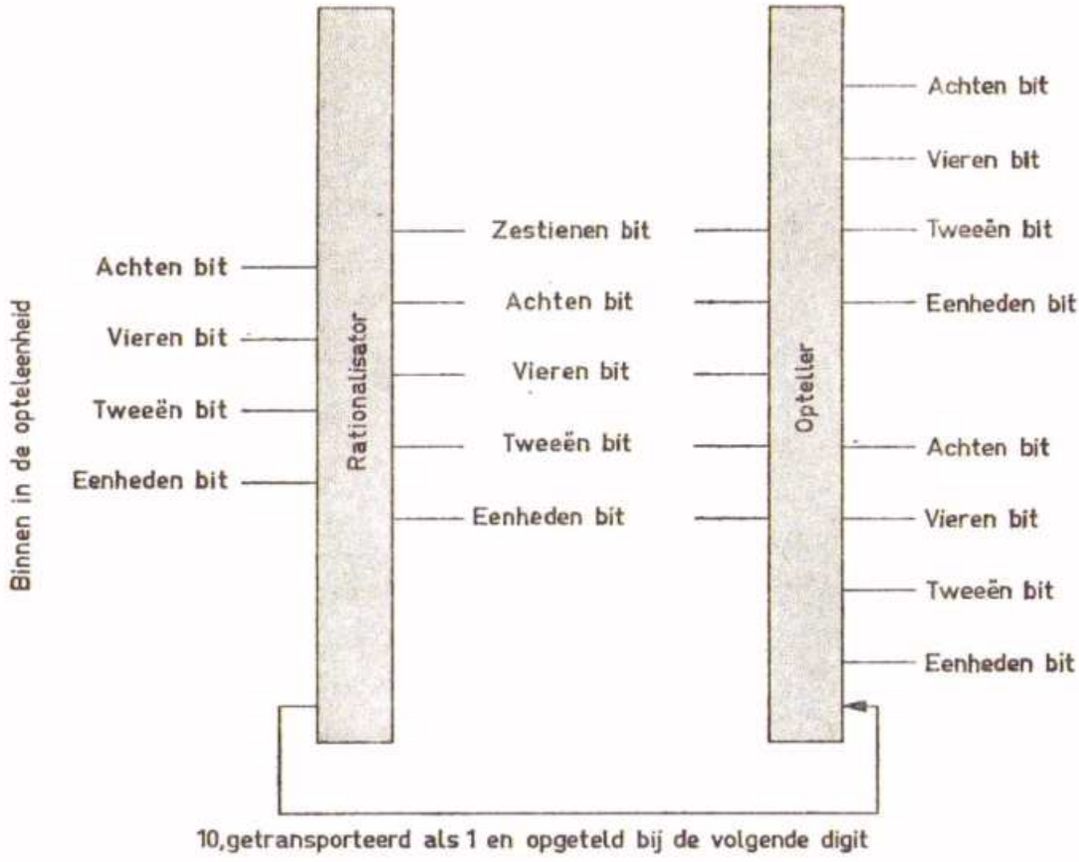
Om twee getallen op te tellen, worden ze elk eerst opgeslagen in een register. Dan worden hun digits op rijen geplaatst, zoals hierboven is beschreven en wordt telkens een digit tegelijk in een opteleenheid „geschoven". Op het moment van de hartslag komen de eenheden-digits de opteleenheid binnen. De opteleenheid telt de digits op en produceert twee digits, een voor de som en een om te transporteren. Bij de volgende hartslag verplaatst zij de som-digit naar het linker einde van een register en voert de te transporteren digit aan zichzelf toe. De te transporteren digit komt de opteller op hetzelfde moment binnen als de tientallen digits. Op deze wijze transporteert de opteleenheid op dezelfde wijze als wij dat doen als we met potlood en papier optellen, van de eenheden kolom naar de tientallen kolom. Slag voor slag marcheren de digits van de twee getallen de opteleenheid in en de digits van de som marcheren er aan het andere eind weer uit.
Laat ons nu eens in de opteleenheid kijken om te zien hoe zij de som produceert en digits transporteert. Als twee digits de opteleenheid binnenkomen, dan maakt iedere digit zijn entree in de gedaante van een vier-bits-binair getal. We hebben op blz. 107 gezien, dat twee van dergelijke getallen kunnen worden opgeteld in een combinatie van een halve opteller en drie hele optellers. We kunnen zorgen voor een transportdigit, die 1 of 0 kan zijn door de halve opteller te vervangen door een hele opteller. Dus kan een batterij van vier hele optellers zorgen voor de op-

telling van twee digits en de getransporteerde digit van de voorgaande optelling. We zullen het woord *opteller* gebruiken als afkorting voor deze batterij van vier hele optellers. De uitgang daarvan is soms een getal dat groter is dan vijftien en kan zelfs wel negentien zijn (9 + 9 + 1). Om een dergelijk groot getal te schrijven zijn er vijf bits nodig. De som verschijnt dus eerst als een getal van vijf bits. Wanneer de som tien is of meer, dan is het nodig het getal in twee delen te splitsen. Een deel is de som-digit, die moet worden doorgegeven aan het register, dat het antwoord ontvangt. Het andere deel is het tiental, dat wordt veranderd in een 1, die moet worden getransporteerd. Dit splitsen van de som wordt gedaan door



Optelling van getallen met drie digits

een speciale eenheid, die *rationaliseerder* wordt genoemd. Een volledige opteleenheid bevat zowel een rationaliseerder als een opteller.



Hoe de NORC vermenigvuldigt

Om in te zien hoe de NORC getallen vermenigvuldigt, zullen we eerst de normale wijze van vermenigvuldigen met potlood en papier eens wat nader bekijken. Wanneer we 327 met 415 willen vermenigvuldigen, dan vermenigvuldigen we 327 eerst met de digits 4, 1 en 5 afzonderlijk. We schrijven de produkten onder elkaar met de opeenvolgende produkten telkens een plaats naar links verschoven. Dan tellen we deze produkten op.

```
   327
 × 415
------
  1635
   327
1308
------
135705
```

Normale methode van vermenigvuldiging

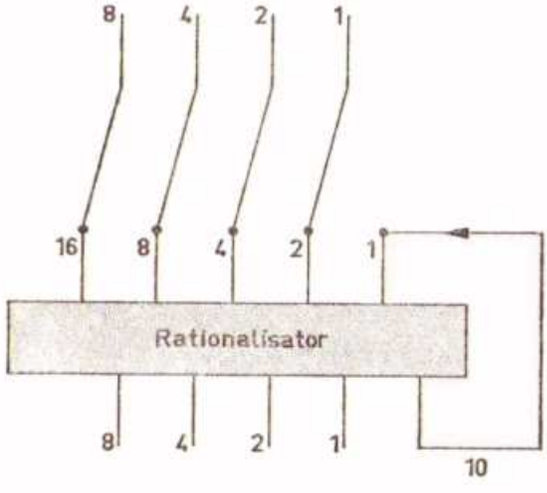
Om in staat te zijn *elke* twee willekeurige getallen met elkaar te vermenigvuldigen behoeven we alleen maar te weten:

1. Hoe te vermenigvuldigen met iedere digit van 0 tot 9.
2. Hoe de afzonderlijke gedeeltelijke produkten op de juiste wijze onder elkaar te plaatsen.
3. Hoe deze op te tellen.

De NORC vermenigvuldigt getallen in principe op dezelfde wijze. De methode wijkt echter in twee opzichten van de normale af. Bij de normale methode van vermenigvuldiging vermenigvuldigen we het vermenigvuldiggetal alleen met die digits, die in de vermenigvuldiger voorkomen. Verder vermenigvuldigen we met een digit per keer. De NORC vermenigvuldigt met al de digits van 0 tot 9 en verricht al deze vermenigvuldigingen gelijktijdig. Dan *kiest* zij voor de optelling alleen die produkten, welke overeenkomen met digits van de vermenigvuldiger. Het werk van de NORC bestaat dus uit vier gedeelten:

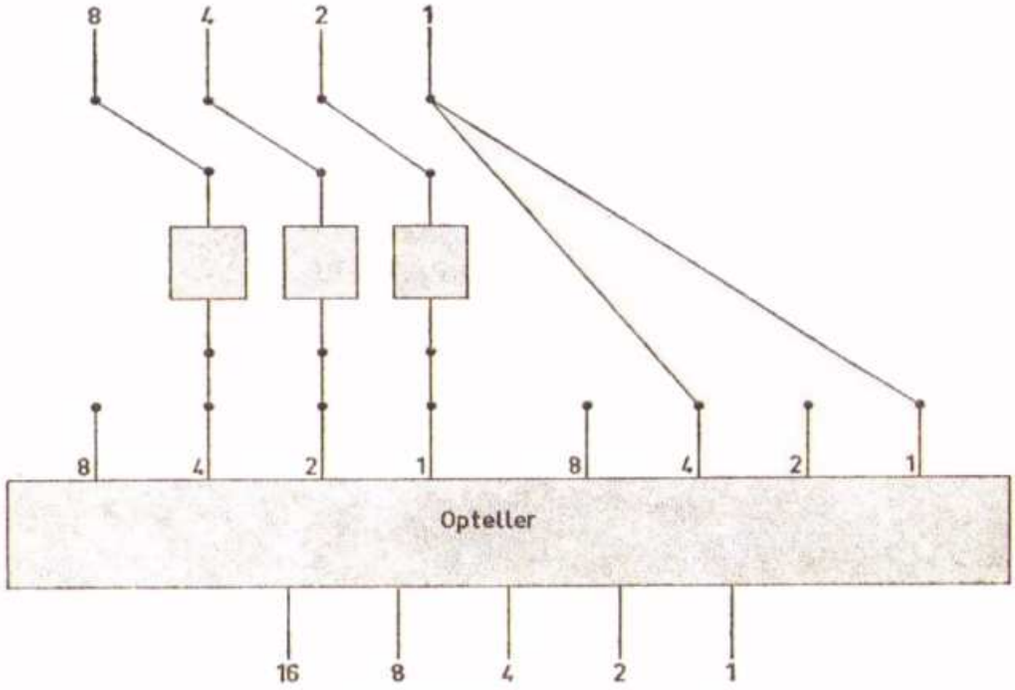
1. vermenigvuldigen met de digits
2. de betreffende produkten uitkiezen
3. deze op de juiste wijze plaatsen
4. optellen daarvan.

Laten we de details van al deze bewerkingen eens nader beschouwen. *Vermenigvuldiging.* Vermenigvuldiging met 1 levert geen moeilijkheden op omdat het produkt gelijk is aan het vermenigvuldigtal. Om met 2 te vermenigvuldigen, maken we gebruik van het feit, dat we op blz. 24 nader hebben bekeken: U kunt een binair getal met 2 vermenigvuldigen door iedere bit een plaats naar links te verschuiven. De NORC doet dat als



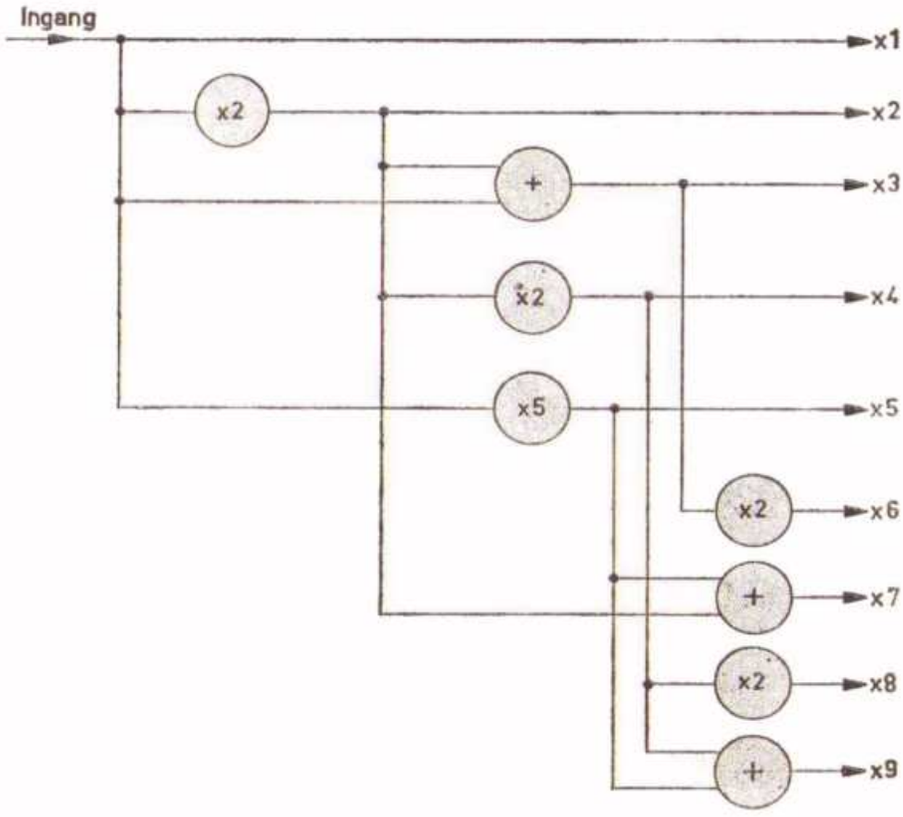
Een rationalisator gebruikt voor het vermenigvuldigen met 2

volgt: De digits van het vermenigvuldigtal worden op rijen gezet in een register en worden dan stuk voor stuk toegevoerd aan een rationalisator. Maar de bits, die de digits voorstellen, worden niet aan de gebruikelijke ingangsklemmen toegevoerd. In plaats daarvan worden ze een plaats naar links verschoven. De eenheden-bit wordt toegevoerd aan de tweeën-klem. De tweeën-bit wordt toegevoerd aan de vieren-klem enz. Dit verdubbelt automatisch iedere digit. Ondertussen splitst de rationalisator in een enkele digit en een te transporteren digit. De enkele digit verschijnt aan de uitgang van de rationalisator. De te transporteren digit wordt toegevoerd aan de eenheden ingangsklem van de rationalisator. De te transporteren digit wordt toegevoerd aan de eenheden ingangsklem van de rationalisator. Dan wordt hij gecombineerd met het dubbele van de volgende digit, die de rationalisator binnenkomt. Op deze wijze verdubbelt de gewijzigde rationalisator een getal door de digits een voor een te verdubbelen en te transporteren daar waar het nodig is, net zoals we dat doen bij vermenigvuldigen uit het hoofd.
Om een getal met 3 te vermenigvuldigen wordt de NORC geleid door de distributieve eigenschap $3\,N = (2 + 1)\,N = 2N + 1N$. Ze vermenigvuldigt een getal met 3 door het getal te verdubbelen en dan dit produkt op te tellen bij het oorspronkelijke getal. Om een getal met 4 te vermenigvuldigen wordt het getal verdubbeld en dan het resultaat weer verdubbeld.



Vermenigvuldiging met 5

Om een getal met 5 te vermenigvuldigen, vermenigvuldigt de NORC het eerst met tien en deelt dan door twee. Zoals we op blz. 24 hebben gezien kunt u een decimaal getal met tien vermenigvuldigen door iedere digit een plaats naar links te verschuiven. In de NORC worden de digits van een getal op rijen gezet in een register en dan een voor een toegevoerd aan de rekeneenheden. De eerste digit, die wordt toegevoerd is de digit van de eenheden. Dan volgt de digit van de tientallen enz. Er is een zekere tijd gereserveerd voor het toevoeren van iedere digit. Als de binnenkomende digits allemaal vertraagd worden met de tijd van een interval tussen twee opeenvolgende hartslagen, dan komen de eenheden digits binnen op de tijd, die gereserveerd is voor de tientallendigits, de digits voor de tientallen komen binnen op de tijd, welke gereserveerd is voor de digits voor de honderdtallen enz. Het is dus, of alle digits een plaats naar links in het register zijn opgeschoven. Het resultaat is, dat het getal met tien is vermenigvuldigd. Deling door twee is het tegenovergestelde van vermenigvuldigen met twee en wordt verkregen door de bits, die elke digit voorstellen een plaats naar rechts te verschuiven. De NORC past deze technieken gelijktijdig toe op de twee-bit, de vier-bit en de acht-bit van elke digit wanneer zij aan de opteller worden toegevoerd aan zowel de



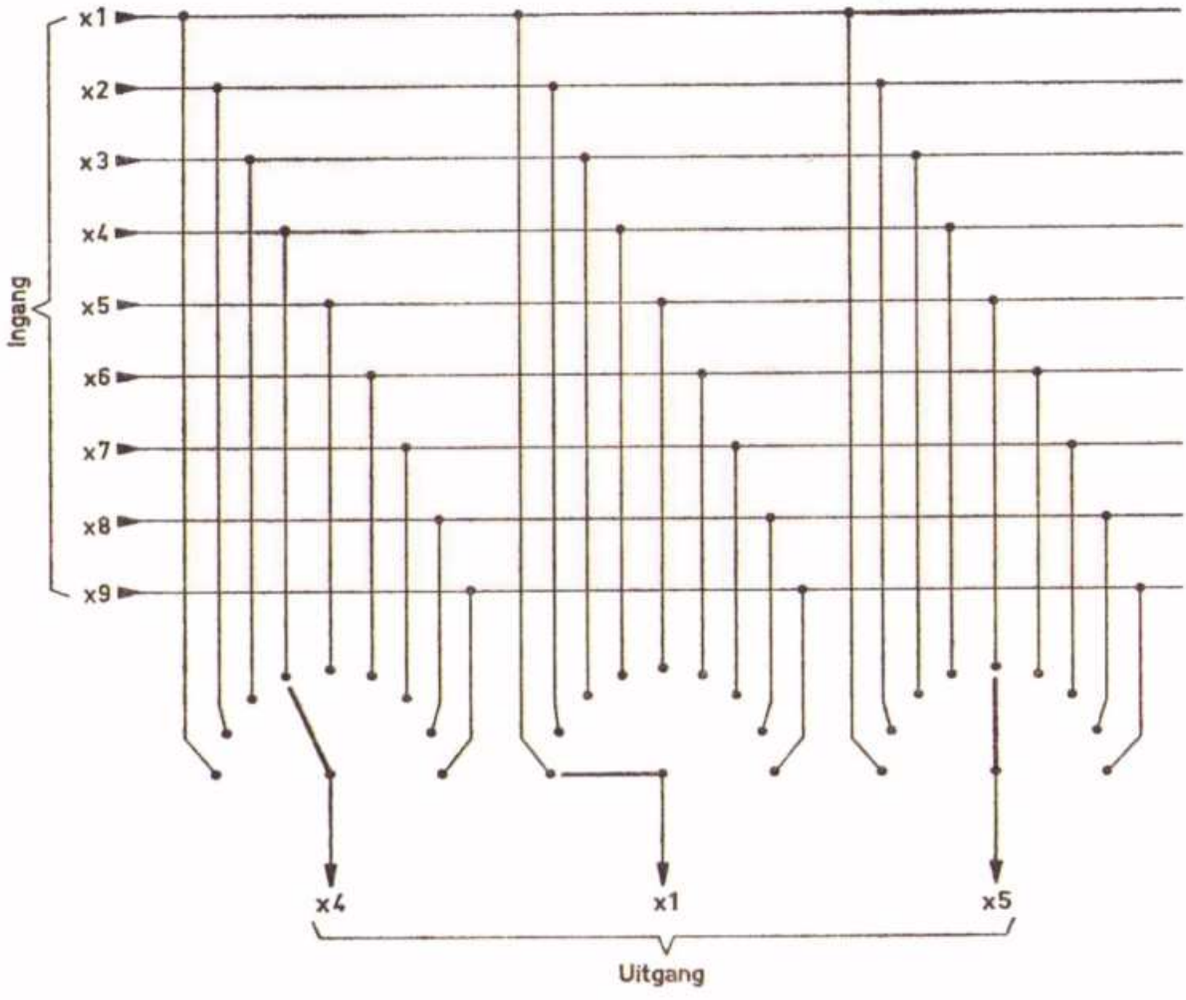
Een produktgenerator

eenheden als vieren-klem, zodat een één veranderd wordt in één plus vier. De verbindingen nodig om een getal met 5 te vermenigvuldigen zijn in het schema aangegeven.

Om een getal met 6 te vermenigvuldigen, vermenigvuldigt de NORC het eerst met 3 en verdubbelt daarna de uitkomst. Om een getal met 7 te vermenigvuldigen, vermenigvuldigt de NORC de getallen afzonderlijk met 5 en met 2 en telt daarna de produkten op. Om met 8 te vermenigvuldigen, wordt het produkt van een vermenigvuldiging met 4 verdubbeld. Om met 9 te vermenigvuldigen, wordt er eerst afzonderlijk met 4 en 5 vermenigvuldigd, waarna de produkten worden opgeteld.

Alle vermenigvuldigingen hebben plaats in een eenheid, die *produktgenerator* wordt genoemd. Een schakelschema daarvan ziet u hieronder.

Uitkiezen. Wanneer alle negen produkten uit de generator komen, worden ze geleid naar een stel keuzeschakelaars. Iedere schakelaar is ingesteld

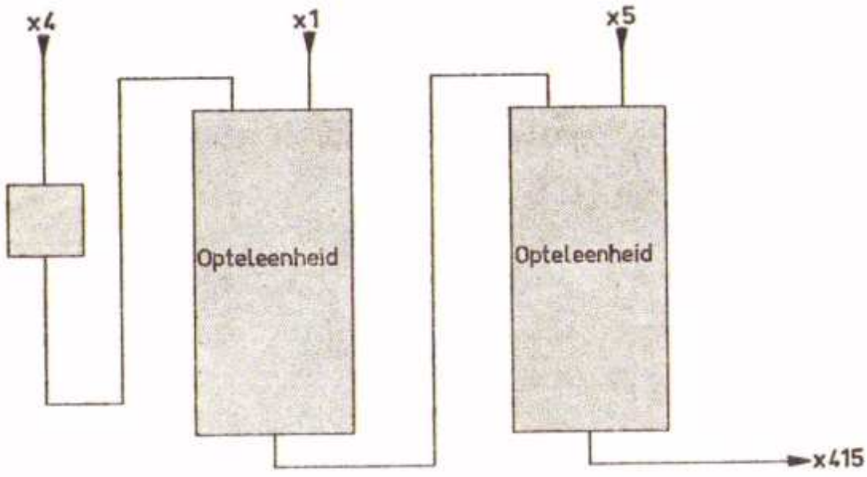


Het uitkiezen van de gewenste produkten

voor een van de digits van de vermenigvuldiger. Is de digit van de vermenigvuldiger 0, dan wordt de schakelaar op de *uit*-stand gezet. Op deze wijze kiest iedere schakelaar slechts een van de produkten eruit en voert dat verder als haar eigen uitgang.

Rangschikken en optellen

Dat wordt in een keer gedaan door de uitgangen van de keuzeschakelaars toe te voeren aan in serie geschakelde onderdelen (zie onderstaand schema). Het produkt van de meest linkse digit wordt toegevoerd aan een DPU, terwijl alle overige worden toegevoerd aan opteleenheden. Elk van deze eenheden veroorzaakt een vertraging van een microseconde. De vertraging heeft tot resultaat, dat alle successievelijke gedeeltelijke produkten op hetzelfde ogenblik, dat zij worden opgeteld, een plaats naar links worden verschoven.



Het combineren van de gedeeltelijke produkten

Wanneer al deze samengestelde verbindingen worden samengevoegd krijgen we de NORC *vermenigvuldiger*. Als twee getallen worden vermenigvuldigd, worden zij van registers uit toegevoerd aan de vermenigvuldiger. Vijf microseconde nadat het vermenigvuldigtal begint de vermenigvuldiger binnen te treden, begint het produkt in een ander register te verschijnen.

Getallen voor doorverbindingen

Veronderstel, dat een getal is opgeslagen in het NORC geheugen en dat we van de machine verlangen, dat zij dit getal overbrengt op een register.

We moeten de machine dan opdragen een register te verbinden met zekere geheugenlocaties. De opdrachten moeten de locaties in een taal bereiken, die de machine kan „begrijpen".
Deze taal neemt de vorm aan van getallen. Een getal wordt toegewezen aan iedere locatie, net zoals we huisnummers hebben om precies de plaats aan te geven waar wij wonen. Het getal, dat bij een locatie behoort, heet het *adres*. De machine is nu zodanig bedraad, dat wanneer een adres van een locatie als onderdeel van een opdracht aan de machine wordt toegevoerd, de betreffende schakelaars worden gesloten om een register op deze locatie aan te sluiten.

Getallen voor opdrachten

De opdrachten, die aan de NORC worden gegeven vertellen haar ook, wat zij moet doen. Er kan worden gezegd, dat ze twee getallen moet optellen of ze moet vermenigvuldigen enz. Deze opdrachten moeten ook in een taal worden verstrekt, die de machine kan begrijpen. Voor dit doel wordt eveneens een getallencode gebruikt. Noemen we bij voorbeeld twee getallen, die aan het geheugen worden onttrokken A en B, dan wil het opdrachtgetal 20 zeggen „Reken $A + B$ uit en houd het resultaat vast". Het opdrachtgetal 23 wil zeggen: „Reken $A - B$ uit, verander het teken van de uitkomst en bewaar het resultaat".
Met behulp van deze code kunnen alle opdrachten voor de machine worden geschreven als een reeks digits. Zestien digits, of 64 bits worden daarvoor gebruikt. Twee extra bits worden gebruikt voor controledoeleinden. Het geheel van 64 bits wordt een *opdrachtwoord* genoemd. Hieronder volgt een gedeelte van een opdrachtwoord, met de vertaling daarvan in voor ons begrijpelijke taal.

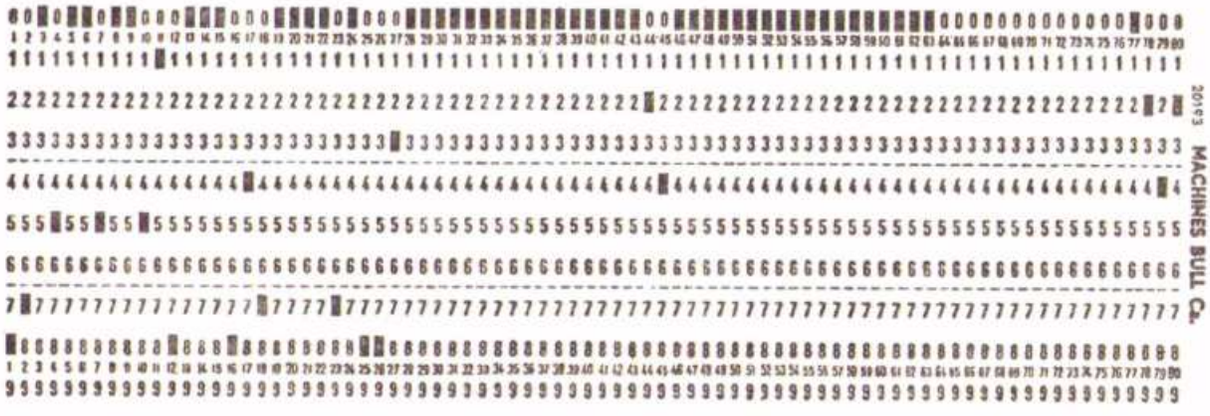
Opdracht: 20/0168/0341/0649/

Betekenis: Neem het getal uit geheugenlocatie 168 en tel het op bij het getal uit geheugenlocatie 341 en sla de uitkomst op in geheugenlocatie 649.

Een belangrijke consequentie van het gebruik van getallencode voor de opdrachten is, dat *opdrachten* ook in de geheugeneenheid van de machine kunnen worden opgeslagen. Hierdoor is het mogelijk de machine te zeggen, dat zij zekere bewerkingen moet uitvoeren en zich dan tot een zeker geheugen-adres moet wenden om te vragen wat ze daarna moet doen.

Ingang en uitgang

Om opdrachten in bewaring te kunnen geven worden ze eerst op een ponskaart overgebracht. Dit wordt gedaan met behulp van een machine die een toetsenbord heeft, dat op dat van een schrijfmachine lijkt. Als de bediener van de machine de betreffende toetsen indrukt, worden er gaten in een kaart geponst, waardoor de opdracht wordt omgezet in de ponskaartcode. Van de ponskaart wordt de opdracht overgebracht op een magnetische band. Zij wordt dan elektrisch op de band vastgelegd in de vorm van bits. Iedere bit wordt weergegeven door de aanwezigheid of de afwezigheid van een magnetische „stip" op de band, evenals iedere bit in het geheugen wordt aangegeven door de aanwezigheid of de afwezigheid van een geladen „stip". Van de band wordt de opdracht overgebracht op een register en van het register wordt zij weer toegevoerd aan het geheugen. Om de uitgang van de machine in gedrukte vorm te krijgen, wordt dit proces omgekeerd. De informatie wordt van het geheugen overgebracht op een register en daarvandaan op de band. Van de band wordt het op een ponskaart gezet, waarvan we de informatie leesbaar kunnen maken met behulp van een soort schrijfmachine. De machine heeft nog een mogelijkheid tot contact met haar bediener. Er is nl. nog een bedieningstafel met schakelaars en indicatie-instrumenten. Met behulp van de schakelaars kan de bediener opdrachten geven en wijzigen. Op de indicatie-instrumenten kan hij zien wat de machine bij iedere stap doet.



Een ponskaart

Snelheid

Omdat de machine werkt op het ritme van haar hartslag, werkt de NORC zeer snel. Zij kan twee getallen van dertien digits optellen in vijftien microseconden. Met deze snelheid kan zij in een seconde net zoveel berekeningen uitvoeren als een mens met potlood en papier in een week kan doen. Het resultaat is, dat berekeningen die, wanneer ze door mensen moeten worden uitgevoerd, „onmogelijk" zijn enkel en alleen omdat ze te lang zouden duren om praktisch te zijn, wel praktisch en dus ook mogelijk worden wanneer ze door de machine worden uitgevoerd.

HOOFDSTUK XII

DENKENDE MACHINES EN HET VERSTAND

Machines, die zich als hersenen gedragen

Automatische rekenmachines worden denkende machines genoemd omdat zij zich in vele opzichten als een brein gedragen. Zij kunnen berekeningen met getallen uitvoeren. Deze variëren in moeilijkheid van eenvoudig tellen tot het oplossen van differentiaalvergelijkingen toe. Zij kunnen opdrachten ontvangen en uitvoeren. Zij hebben een geheugen, waarin zij informaties kunnen opbergen voor later gebruik. En omdat zij voorzien zijn van *en-, of-* en *niet*-componenten kunnen zij de logica-bewerkingen uitvoeren, die wij deductieve redeneringen noemen.

De combinatie van al deze eigenschappen maakt dat de machine nog meer op een brein gelijkt. Zij kan vergelijkingen maken en dan op grond van wat zij waarneemt, een keus doen uit verschillende alternatieve gedragslijnen. Een schaakspelende machine bij voorbeeld kan van tevoren voor verschillende zetten de gevolgen berekenen, die een of andere zet kan hebben. Terwijl zij vaste regels volgt, die een deel van de opdracht uitmaken, overweegt zij dan de verschillende zetten die mogelijk zijn en kiest daaruit de zet, die het „beste" is volgens de ingebouwde beoordelingsstandaard.

Een nieuwe ontwikkeling vormen de machines, die van hun ondervinding kunnen leren. Een van deze is de machine, die schaak speelt. Bij haar eerste partijen wordt zij geleid door de oorspronkelijke opdrachten. Wanneer zij speelt, bewaart zij alle zetten in haar geheugen. Als dan een zeker aantal partijen is gespeeld, waardeert zij haar zetten naar hun werkelijke consequenties. Dan verandert zij haar eigen opdrachten, waarbij dan rekening wordt gehouden met haar jongste ervaringen. Taktieken die niet veel goeds opleverden, worden verworpen. Op taktieken die meestal tot een overwinning voerden, wordt meer de nadruk gelegd. Door herhaalde herziening van haar opdrachten verbetert de machine haar spel voortdurend.

Het brein is als een machine

Daar het zin schijnt te hebben een rekenmachine met hersenen te vergelijken, is het vanzelfsprekend dat we die vergelijking ook willen trachten om te keren. Gelijkt het brein op een rekenmachine? We zien, dat dit in sommige opzichten inderdaad zo is. Een digitale rekenmachine is een samengesteld elektrisch netwerk, dat is opgebouwd uit een zeer groot aantal eenheden. De fundamenteelste eenheid is wel de vacuümbuis of haar moderne vervanger de transistor. Er zijn ook andere eenheden, die weer opgebouwd zijn uit basis-eenheden. Deze omvatten onderdelen als DPU's, *en*-poorten, *of*-poorten en omkeerders. Het brein is eveneens een samengesteld elektrisch netwerk dat uit een groot aantal eenheden is opgebouwd. De fundamentele eenheid in de hersenen is de zenuwcel. Het gedrag van vele zenuwcellen is ongeveer als dat van een DPU. Wanneer zij worden geprikkeld door een zenuwimpuls van een andere cel, dan zenden zij een zenuwimpuls van zichzelf uit. Sommige zenuwcellen zullen in werking treden wanneer zij worden geprikkeld door een van de vele andere cellen. Deze cellen gedragen zich als *of-poorten.*
Andere zullen alleen in werking komen als zij worden geprikkeld door een hele groep andere cellen. Deze gedragen zich als *en-poorten.* Wat dit gedeelte van hun gedrag aangaat schijnen de hersenen te werken als een digitale rekenmachine. Het is echter ook mogelijk, dat de werking van een zenuwcel afhangt van de ruimtelijke ligging van de cellen, die ermee zijn verbonden en van de plaats van de cel, die haar een impuls toestuurt. Zenuwimpulsen en chemische en natuurkundige prikkels voor zenuwcellen schijnen samen bij elkaar op te worden geteld tot een totale stimulans. Zo beschouwd is het gedrag van de hersenen als dat van een analoge rekenmachine. Voor zover de hersenen dus kunnen worden vergeleken met een rekenmachine schijnen zij er een te zijn van het gemengde type, ten dele digitaal en ten dele analoog.

Hersenen contra machine

Hoe staat het als we de hersenen en de machine gaan vergelijken voor wat betreft samengesteldheid en hun efficiëncy als onderdelen van denkende apparaten. We kunnen een ruw antwoord op deze vragen krijgen uit enkele bekende feiten betreffende hersenen en machines. Wij kunnen daar-

bij als maatstaf voor de relatieve samengesteldheid de verhouding nemen van het aantal eenheden-handelingen dat door een gelijk volume van elk kan worden verricht in gelijke tijden. Dit kan worden berekend uit de verhouding van de volumen van de basiseenheden, die zij elk bevatten en de verhouding van hun snelheden. Een zenuwcel is ongeveer een biljoen maal kleiner dan de grondeenheid van een rekenmachine en zij is ongeveer honderdduizend maal langzamer in haar werking. Wanneer wij deze getallen delen krijgen we de gevraagde maatstaf. Zenuwweefsel is ongeveer tienduizend maal efficiënter dan elektronische apparaten.
Een aspect van de grotere samengesteldheid van de hersenen is de grootte van hun geheugencapaciteit. Een grote moderne rekenmachine heeft een geheugencapaciteit van een miljoen bits. De geheugencapaciteit van het brein wordt geschat op 280 biljoen maal biljoen bits. De geheugencapaciteit van de hersenen is dus ongeveer 280 miljoen maal miljoen maal zo groot als van enige bestaande machine.

De geheugeneenheid van het brein

Teneinde een elektronische rekenmachine een voldoende geheugencapaciteit te geven, hebben ingenieurs de rekenmachine een afzonderlijke geheugeneenheid gegeven. Teneinde deze eenheid efficiënt te maken, hebben ze het nodig gevonden haar op te bouwen uit onderdelen, die verschillen van de actieve grond-eenheden in de logische en wiskundige gedeelten van de machine. In de NORC bij voorbeeld is de fundamentele geheugeneenheid een lading op de voorzijde van een televisiebuis, liever dan een DPU. Deze feiten werpen een interessante serie vragen betreffende de hersenen op. Hebben de hersenen een afzonderlijke geheugeneenheid? Zo ja, waar zit die? Wat zijn de grondeenheden waaruit ze is samengesteld? Ondervinding met elektronische rekenmachines doen de mogelijke richting aan de hand, waarin antwoorden op deze vragen moeten worden gezocht. Omdat de hersenen zo'n grote geheugencapaciteit hebben, schijnt het aannemelijk te veronderstellen, dat net als in het geval van de machines, de fundamentele geheugeneenheid verschillen zal van de actieve grondeenheid de zenuwcel. De fundamentele stof bij voorbeeld, waaruit het geheugen is samen gesteld, kunnen b.v. de verbindingen zijn tussen de zenuwcellen, eerder nog dan de cellen zelf. Deze en andere veronderstellingen worden nagegaan door geleerden, die het zenuwstelsel bestuderen.

Veelbelovend beter begrip

Vergelijkingen tussen de hersenen en elektronische rekenmachines zijn geen nietszeggende bespiegelingen. Zij zijn noodzakelijke onderdelen van de studie van beide. Deze vergelijkingen hebben hun nut al bewezen. Toen wijlen John von Neumann en zijn medewerkers werkten aan het ontwerp van de rekenmachine, die onder de naam JONIAC bekend staat, hebben zij weloverwogen getracht daarin enkele bekende eigenschappen van ons brein te immiteren. Aan de andere kant volgen onderzoekers, die de werking van onze hersenen bestuderen weer lijnen in het onderzoek, die zijn ingegeven door onze kennis betreffende rekenmachines.
Neurologie en de theorie van rekenmachines zijn twee verschillende takken van wetenschap. Maar zij lopen tot op zekere hoogte parallel en een vooruitgang op het ene gebied stimuleert weer een vooruitgang op het andere gebied. Een van de werkelijk spannende vooruitzichten die uit deze verwantschap voortkomt, is dat des te verder we de rekenmachines ontwikkelen, des te beter we ze zullen begrijpen. En des te meer we van onze rekenmachines afweten, des te beter zullen we onszelf kennen.

A

abacus 33
adres 124
alfabet voor getallen . . . 18, 19
algebra 29
— van Boole . . 65—67, 84, 91
— van de gehele getallen . . 30
— van de natuurlijke getallen . 29
— van de proposities . . 77, 84
Alice in Wonderland 73
analoge rekenmachines . . . 34
associatieve eigenschap
van de optelling 28
associatieve eigenschap
van de vermenigvuldiging . . 28
automatische machine . . 6, 16
axioma 63, 64, 67

B

bepalen van het complement . . 59
bepaling 79
„biconditional" 79, 82
binaire digits 21
binaire getallen 22, 24
binaire stelsel 21, 25
bits 21, 24

C

commutatieve eigenschap
van de optelling 27
commutatieve eigenschap
van de vermenigvuldiging . . 27
complement 59, 60, 104

D

denkende machine 6, 9
denkers 43
diagrammen van Venn . . . 52
differentieel-analysator . . . 35
differentieel overbrenging . . 35
digit 20
digitale rekenmachine . . . 35
distributieve eigenschappen . . 57
— van de vermenigvuldiging . . 28
dynamische impulseenheid . . 112

E

eenheidsgroep 50
eigennaam 44
elektronische poorten . . . 104
elementen 44
en 83
en-poort 103, 105, 128
equivalente uitdrukkingen . . 69

G

geheugen-eenheid 17

H

halve opteller 107
hele opteller 107, 109

I

ingangseenheid 17
integrator 35

K

kilometerteller 39
kruising 55

L

lege groep 50
locatie 114
logica 43

M

machine van Turing . . . 11, 16

N

niet 83
NORC 113, 116

O

of 83
of-poort 103, 105, 128
omkeerder 104, 105
ontkenning 79
onwaar 78

P

poorten 103
positioneel systeem . . . 15, 19
positioneel talstelsel 20
produkt 55
produkt-generator 122
programma-eenheid 16
programmatabel 13, 15
propositie 45
proposities over proposities . . 77
puzzel van Lewis Caroll . . . 73

Q

quotiënt 26

R

rationaliseerder 118
relais 103
relatie 47, 48
rekeneenheid 16

S

schakelaar 103
scheiding 79
Shannon Claude E. 98

som 54
sommen tegenover produkten . . 60
som-uitgang 111
soortnaam 44
soroban 33
subgroep 54, 66
subgroep-relatie 52
Symbilic Logic 73

T

tautologieën 86
telmachine 37, 39
terugkoppeling 8
theorema's 63, 64
thermostaat 6, 7
transiet 48
transitieve eigenschap . . . 47
transporteren 38, 107
transport-uitgang 111
tweetallig stelsel 21

U

uitgangseenheid 17
uitkiezen 122
„universe of discourse" . . 46, 50
universum 50, 51

V

variabelen 27
verbindingen 77
vereniging 79
vermenigvuldiging van groepen . 55

W

waar 78
waarde van het getal 18
waarheidstabellen . . 79, 80, 88
waarheidswaarde 45
wet van de dualiteit 70
wet van Een 28
wet van Nul 28

ZO DENKEN MACHINES

We leven hedentendage in het tijdperk van de „denkende machine" en de automatisering. Lange en ingewikkelde berekeningen worden door rekenmachines nauwkeurig uitgevoerd en onnoemelijk veel sneller dan het menselijk brein daartoe in staat is.

In heel wat bedrijven doen „elektronische hersenen" dienst als schrijvers en boekhouders en houden voorraadlijsten bij. Bij bovengenoemde activiteiten werken de rekenmachines op het laagste niveau van hun bekwaamheid. Zij tellen getallen op of trekken ze van elkaar af en de uitkomsten daarvan worden in het „geheugen"-toestel bewaard. Niet alleen optellen en aftrekken, doch vermenigvuldigen en delen, ja zelfs differentiaalvergelijkingen worden foutloos uitgevoerd.

De auteur is er in geslaagd om de theorie van de rekenmachine uiteen te zetten voor eenieder die de elementaire beginselen van de algebra kent.

Het boek begint bij de alledaagse getallen en komt via de algebra van Boole tot het elektronische brein.

„Zo Denken Machines" is een boek voor allen die met rekenmachines werken, rekenmachines verkopen en onderhouden, accountants, statistici en ballistische deskundigen, alsook voor de elektronica-man en de wiskundeliefhebber.

Van speciaal belang is dit boekje voor wiskundeleraren die een antwoord zoeken op de klassieke vraag van hun leerlingen waar algebra toch goed voor is.